Transformada de Laplace: aplicación en circuitos eléctricos

Victor J. Lifchitz

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
victor.j.lifchitz@gmail.com

Agosto 2011

Resumen: En el presente informe se considerará la aplicación de la Transformada de Laplace a la resolución de circuitos eléctricos. Como las condiciones iniciales son tomadas automáticamente en cuenta en el proceso de transformación, la transformada de Laplace es especialmente atractiva para examinar el comportamiento de tales sistemas.

Palabras clave: Laplace, transformada, circuito, capacitor, resistor, inductancia.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace es de gran importancia en la ingeniería ya que permite reducir ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes a simples expresiones algebraicas de sencilla resolución.

La transformada de Laplace es un ejemplo de una clase llamada **transformación integral** y toma una función *f(t)* de una variable *t* (a la cual nos referimos con tiempo) en una función *F(s)* de otra variable s (la frecuencia compleja).

Se define de la siguiente manera:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Donde *s* es una variable compleja y e^{-st} es llamado el **núcleo** de la transformación.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

Los circuitos eléctricos pasivos son construidos con tres elementos básicos: **resistores** (que tienen resistencia *R* medida en ohms Ω), **capacitores** (que tienen capacitancia *C*, medida en faradios F) e **inductores** (que tienen inductancia *L*, medida en henrys H), con las variables asociadas **corriente** *i(t)* (medida en amperes A) y **voltaje** *v(t)* (medido en volts V). el flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga *q(t)* (medida en coulombs C) mediante la relación

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (2)$$

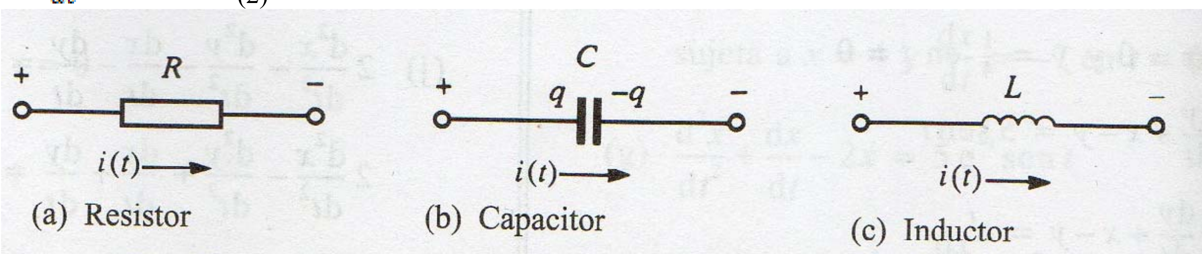

Figura 1.1: elementos pasivos de circuitos eléctricos.

Convencionalmente, los elementos básicos se representan simbólicamente como en la figura 1.1.

Las relaciones entre el flujo de corriente *i(t)* y la caída de voltaje *v(t)* a través de estos elementos en el tiempo *t* son:

- Caída de voltaje a través de la resistencia = *iR* (Ley de Ohm).

• Caída de voltaje a través del capacitor = $\frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{q}{C}$

La interacción entre los elementos individuales que forman un circuito eléctrico está determinada por las **leyes de Kirchhoff:**

Ley 1

La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es cero.

Ley 2

La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero.

El uso de estas leyes nos lleva a las ecuaciones de circuito, las caules pueden ser analizadas usando las técnicas de la transformada de Laplace.

III. EJEMPLO

El circuito *RLC* de la figura 1.2 está formado por un resistor *R*, un capacitor *C* y un inductor *L* conectados en serie a una fuente de voltaje *e(t)*. Antes de cerrar el interruptor en el tiempo *t=0*, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determinaremos la carga *q(t)* en el capacitor y la corriente resultante *i(t)* en el circuito en el tiempo *t* sabiendo que R=160Ω, L=1H, C=10^{-4}F y *e(t)*=20V.

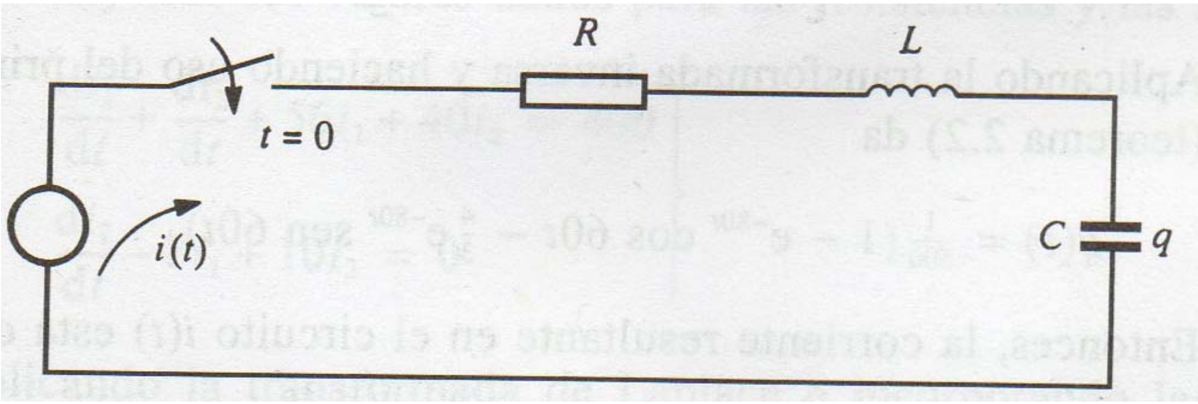

Figura 1.2: Circuito RLC.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito de la figura 1.2 obtenemos:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t)$$

Usando *i=dq/dt*,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

Sustituyendo los valores dados para *L, R, C* y *e(t)* da

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10^4 q = 20$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados llegamos a la ecuación

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = \left[sq(0) + \frac{dq}{dt}(0)\right] + 160q(0) + \frac{20}{s}$$

Donde $Q(s)$ es la transformada de $q(t)$. Estamos suponiendo que $q(0)=0$ y que $\frac{dq}{dt(0)}=0$, así que esto se reduce a

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = \frac{20}{s}$$

Despejando y desarrollando en fracciones parciales da

$$Q(s) = \frac{1}{500}\left[\frac{1}{s} - \left[\frac{(s+80) + \frac{4}{3}(60)}{(s+80)^2 + 60^2}\right]\right]$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso de la propiedad de translación da

$$q(t) = \frac{1}{500}\left(1 - e^{-80t}cos60t - \frac{4}{3}e^{-80t}sen60t\right)$$

Entonces, la corriente resultante en el circuito $i(t)$ está dada por

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{3}e^{-80t}sen60t$$

IV. CONCLUSIÓN

El uso de las herramientas matemáticas aprendidas en la materia son de gran utilidad en muchos temas relacionados con la carrera de Ingeniería Electrónica. El caso elegido es la aplicación mas común, la cual todo estudiante de la carrera deberá utilizar a lo largo de sus estudios.

V. REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. 1er. Cuatrimestre 2011, pags. 56-59. 2011.
[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, pags. 97-100, 130-132.