Sistemas de Tiempo Discreto - Señales discretas

Vega, Maximiliano Ezequiel

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
vega.maxi.eze@gmail.com
Febrero 2014

Resumen: Se explica los aspectos generales de la discretización de una señal el cual es el paso previo para su digitalización. La digitalización de las señales es un proceso imprescindible para poder procesar las mismas en computadoras digitales, aplicándolo por ejemplo al procesamiento por voz de una computadora digital, y además presenta las ventajas de permitir su transmisión con una mayor densidad y velocidad en la información, además de reducir el costo y volumen de los equipos debido a que se requieren magnitudes de energía significativamente más bajas, etc. Aquí se utilizan las Series de Fourier.

Palabras clave: Discretización, Señales, Series de Fourier.

I. INTRODUCCIÓN

El procesamiento de señales es el procesamiento, amplificación e interpretación de señales. Las señales pueden proceder de diversas fuentes. Hay varios tipos de procesamiento de señales, dependiendo de la naturaleza de las mismas.

Una señal es un flujo de información proveniente de una fuente, la cual puede tener una naturaleza diversa: mecánica, óptica, magnética, eléctrica, acústica, etc. Por lo general, para poder ser procesadas, las señales se transforman en señales eléctricas mediante transductores. Para su análisis, las señales habitualmente son modeladas como funciones matemáticas.

La clasificación más básica de las señales se produce según su representación respecto a las variables de las que dependen (tiempo, espacio, etc.); en el caso de las señales discretas, estas sólo tienen valores en una cantidad discreta de puntos, similar a la señal digital.

II. SERIES DE FOURIER

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a tramos. Estas series son la herramienta básica del análisis de Fourier y se usan para analizar funciones periódicas a través de su descomposición en una suma infinita de funciones más simples. Está dada por la siguiente expresión en notación compleja:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \tag{1}$$

En la ecuación (1), ω es la frecuencia fundamental, y el coeficiente c_n es:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-in\pi x}{L}} dx \tag{2}$$

En la ecuación (2), f(x) es alguna función definida en el intervalo [-L, L].

La graficación del desarrollo de Fourier de la ecuación 1, es muy clara si se lo hace en función de la frecuencia, lo que da lugar a representaciones denominadas Espectros en Frecuencia.

III. DISCRETIZACIÓN DE SEÑALES

Los sistemas de control de tiempo discreto (STD), son sistemas dinámicos para los cuales una o más de sus variables solamente son conocidas en ciertos instantes.

Por lo tanto, son aquellos que manejan señales discretas, a diferencia de los sistemas de tiempo continuo (STC) en los cuales sus variables son conocidas en todo momento. El hecho de que algunas funciones del tiempo propias del STD varíen en forma discreta, puede provenir de una característica inherente al sistema, como en el caso de aquellos que trabajan con algún tipo de barrido, por ejemplo: un sistema de radar.

La otra posibilidad es que la variación discreta provenga de un proceso de muestreo de alguna señal, y estos últimos son los que interesan en este estudio. Este proceso de muestreo, que convierte una señal analógica o de tiempo continuo en una señal discreta o muestreada, podría hacerse a un ritmo constante, variable según alguna ley de variación o aleatorio. Aquí veremos aquellos muestreos que obedecen a un ritmo constante, es decir, en los que el intervalo de muestreo es constante. La discretización de una señal es el paso previo para su digitalización, proceso que agrega una determinada codificación a la señal muestreada.

A. El proceso de muestreo

El proceso de muestreo consiste básicamente en producir una alternancia entre los intervalos de presencia de señal y ausencia de la misma, como si se "tomaran muestras" de la señal analógica.

Es equivalente al trabajo de una llave o interruptor electrónico que se abre y se cierra alternadamente, permitiendo el paso de la señal sólo en determinados instantes, que se denominan instantes de muestreo. A la entrada del dispositivo de muestreo, llamado "muestreador", aparece una señal (función del tiempo) analógica y a la salida resultará muestreada o discretizada, lo que se indica con un asterisco (Ver Figura 1).

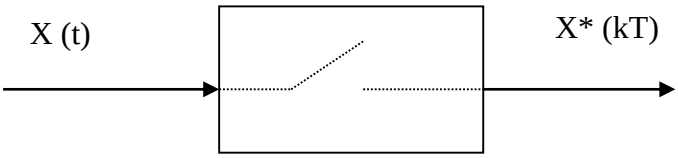

Figura 1: Muestreador

Asimismo, la señal de salida que está muestreada o discretizada [x*], no será función del tiempo continuo, sino precisamente función de los instantes discretos para los cuales ha quedado definida, que se indican como:

$$x^* = x[k] = kT \tag{3}$$

En la ecuación (3), T es el período o intervalo de muestreo y $k \in$ Naturales.

El proceso opera como una modulación en amplitud que produce la señal continua sobre un tren de pulsos p (t). Este tren de pulsos es provocado por la apertura y cierre del interruptor de muestreo a intervalos regulares.

Así como en los STC se describe su comportamiento por medio de las ecuaciones diferenciales correspondientes, en los STD se utilizan ecuaciones de diferencias para representarlos matemáticamente.

B. Representación de la señal

La señal muestreada puede considerarse como el producto del tren de pulsos por la señal analógica, como en toda modulación de amplitud, y para mayor comodidad se supone que los pulsos tienen amplitud unitaria, por lo tanto no se necesita ningún factor de escala. Ver figura 2.

$$x(t) = x(t) * p(t) \tag{3}$$

Es importante mencionar además, que al ser el tren de pulsos una función periódica en el tiempo, esta admite una representación en serie de Fourier:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_s k} \tag{4}$$

En la ecuación (4), la frecuencia ω es la frecuencia de muestreo, tal que ω = 2π/T siendo, obviamente, T el periodo de muestreo, que será el mismo para el tren de pulsos, como para la función muestreada, que resulta periódica del mismo periodo.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)e^{-jn\omega_s t}dt \qquad (5)$$

La integral sólo tiene sentido entre t = 0 y t = p; y en ese intervalo p (t) = 1 (Ver Figura 3), entonces:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)e^{-jn\omega_s t}dt = -\frac{1}{(Tjnw)}[e^{-jn\omega_s p} - 1] = \frac{1}{(Tjnw)}[1 - e^{-jn\omega_s p}] \qquad (6)$$

Asimismo, la función muestreada se puede expresar teniendo en cuenta el desarrollo de Fourier del tren de pulsos, como:

$$x^*(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_s t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) * c_n e^{in\omega_s t} \qquad (7)$$

Por lo tanto c_n es también el coeficiente de Fourier de la señal discreta, que tiene el desarrollo en serie con el mismo periodo T. El coeficiente c_n, está relacionado con la transformada de Fourier de la señal discreta X*(jω), lo que nos permitirá obtener su espectro de frecuencias.

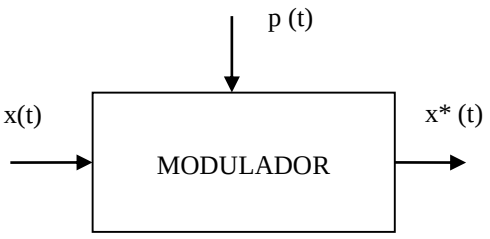

Figura 2: Factores que influyen en la señal.

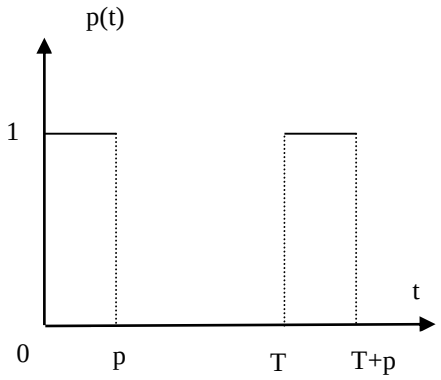

Figura 3: Función p(t).

C. Espectro de frecuencia

Además del espectro de frecuencias de la señal discreta, la señal analógica o de tiempo continuo tendrá su propio espectro, dado por su transformada de Fourier X*(jω), que irá desde ω=0, hasta $\omega=\omega_c$, que será la máxima frecuencia de la señal continua. Es muy importante que la señal analógica tenga un ancho de banda limitado para que sea posible discretizarla. Si la frecuencia máxima fuera muy alta, la discretización se complica, siendo imposible este proceso si el ancho de banda fuera infinito.

El muestreo, produce un espectro muy parecido a la señal continua, pero se despliega en una colección de réplicas del espectro fundamental, desplazada a intervalos que son múltiplos de la frecuencia de muestreo. Si esta es lo suficientemente elevada respecto de la frecuencia máxima, no habrá superposición de los espectros adicionales, lo cual es deseable. Las réplicas, así como la señal continua, pueden ser observadas con más detalle en la Figura 4. Si esta frecuencia ω_s no es suficientemente elevada, se producirá superposición, lo cual redundará en pérdida de información.

Teorema 1 *La frecuencia de muestreo debe ser por lo menos igual o mayor que el doble de la máxima frecuencia de la señal analógica, para permitir la posterior recuperación de información a partir de la señal discreta. Esto es,* $\omega_s \geq 2\,\omega_c$.

Justamente, el Teorema 1 establece cuál debe ser la mínima frecuencia de muestreo ω_s, comparada con la máxima frecuencia de la señal analógica ω_c, para que no se produzca lo antes dicho sobre la pérdida de información al discretizar la señal original. En general, en la práctica es preferible que la frecuencia de muestreo sea por lo menos entre cinco (5) y diez (10) veces mayor que la máxima de la señal continua para discretizar de un modo confiable. Esta es una de las razones del comentario anterior, donde se decía que una de las condiciones para poder muestrear una señal analógica es que tuviera un ancho de banda limitado.

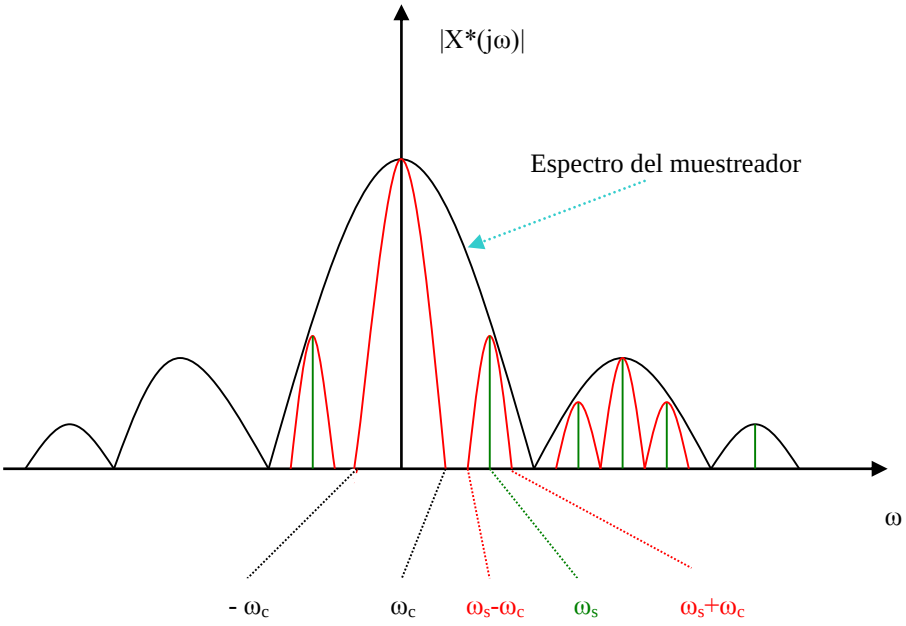

Figura 4: Espectro de señal continua Vs. Espectro de señal discreta.

IV. Conclusión

Como conclusión de esta nota de aplicación puedo decir que me sirvió para analizar las diferentes aplicaciones que existen, y además pude entender para que servía en algo práctico muchos conceptos, herramientas y métodos vistos en el curso durante el cuatrimestre. La serie de Fourier es muy útil en señales discretas, nos ayuda a resolver problemas ingenieriles y de la ciencia.

Referencias

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 1er. Cuatrimestre 2013, pp.54-68. 2013.

[2] Discretización, [internet], disponible en http://materias.fi.uba.ar/7609/material/Clase%2002/03%20a%20Sistemas%20Discretos.pdf, [acceso febrero de 2014].

[3] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.

[4] Muestreo y Cuantificación, [internet], disponible en http://ceres.ugr.es/~alumnos/luis/mycuan.htm, [acceso febrero de 2014].

[5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso febrero de 2014].