Rotacional de vector campo eléctrico y verificación de la ley de Gauss.
Funciones de Variable Compleja

Franco Nicolás Tronelli

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
tronellifranco@gmail.com

Marzo 2015

Resumen: En el presente informe propondremos una solución para una de las ecuaciones de Maxwell de gran utilidad para la electrostática. Se trata de la ecuación que culmina en la Ley de Gauss, que resulta imprescindible para hallar el campo producido por diversas distribuciones de gran simetría. Para ello, introduciremos el concepto de distribución y aplicaremos la función Delta de Dirac.

Palabras clave: Ecuaciones de Maxwell, electrostática, Ley de Gauss, Delta de Dirac.

I. INTRODUCCIÓN

La función δ (léase Delta) de Dirac no es propiamente una función; su encuadramiento riguroso, desde el punto de vista matemático, requiere el uso de la teoría de distribuciones desarrollada por L. Schwartz. No obstante, la δ puede expresarse como límite de una sucesión de funciones, lo que nos permitirá dar una idea intuitiva y operativa de la misma.
Esta función tiene una gran utilidad en física, que posee ínfimas aplicaciones y nos permitirá, entre otras cosas, expresar magnitudes singulares en un punto como límite de magnitudes continuas.

II. LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC.

Si bien dijimos anteriormente que δ de Dirac no es propiamente una función, utilizaremos propiedades que nos podrán ayudar a describir rápidamente su comportamiento sin necesidad de adentrarnos en la Teoría de Distribuciones.

La δ de Dirac se define generalmente de estas tres maneras:

1. Por la ecuación
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t)} dt = 1 \ , \quad \delta_{(t)} = 0 \ \ \forall t \neq 0$$
2. Como límite de una sucesión de funciones $\delta_{(t)} = \lim_{n\to\infty} f_{n\,(t)}$ que verifican
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n\,(t)} dt = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f_{n\,(t)} = 0 \ \ \forall t \neq 0$$
3. Por la propiedad $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t)} f_{(t)} dt = f_{(0)}$ donde $f_{(t)}$ es una función arbitraria continua en el origen.

Si bien estas definiciones parecen claras su justificación se encuentra en la ya mencionada Teoría de Distribuciones. El concepto de distribución o función generalizada T es un proceso de asignación a una función arbitraria $\phi_{(t)}$ un número real α real o complejo. Es decir la distribución T, es un mapeo:

$$\phi_{(t)} \xrightarrow{T} \alpha$$

$$T_{[\phi_{(t)}]} = \alpha$$

Delta de Dirac como distribución:

Así la función Delta de Dirac es una distribución que asigna a la función $\phi_{(t)}$ el número $\phi_{(0)}$, de manera tal que:

$$\phi_{(t)} \xrightarrow{\delta} \phi_{(0)}$$
$$\delta_{[\phi_{(t)}]} = \phi_{(0)}$$

Donde ϕ es cualquier función continua en t = 0.

También suele escribirse por la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t)} \phi_{(t)} dt = \phi_{(0)}$$

Y luego, realizando cambio de variables, sustituciones e integración por parte se pueden demostrar otras gracias a que las distribuciones verifican propiedades de linealidad y continuidad. Obviaremos estos casos, ya que no las aplicaremos y daremos comienzo al desarrollo de nuestro problema.

III. Campo eléctrico

El campo eléctrico es un campo vectorial que permite demostrar la intensidad de la fuerza eléctrica y es calculado mediante la relación de fuerza entre una carga eléctrica fuente y una carga de prueba sobre la carga de prueba.

Asi,

$$\vec{E} \equiv \frac{\overrightarrow{F_e}}{q_0}$$

Donde E es el campo eléctrico, F_e la fuerza electrostática entre la carga fuente y la carga prueba y q_0 la carga de prueba.

Luego, por la definición de fuerza electrostática el campo eléctrico quedara expresado por la siguiente ecuación:

$$\vec{E}_{(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i^n \frac{q_i\,(\vec{r} - \vec{r_i}\,)}{|\vec{r} - \vec{r_i}\,|^3}$$

IV. Divergencia del campo eléctrico

Para definir la divergencia del campo eléctrico, lo primero que haremos será extender el campo eléctrico descripto anteriormente para un conjunto de cargas puntuales a una distribución continua y volumétrica de carga, de manera tal que la ecuación que rige para el caso será:

$$\vec{E}_{(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_{(\vec{r'})}\,\boldsymbol{A_r}}{R^2}\, dV'$$

Donde $\rho_{(\vec{r'})}$ corresponde a la densidad volumétrica de la carga y R a la distancia entre el punto donde se desea hallar el campo y la carga. Estos, pueden verse fácilmente en el siguiente grafico:

Figura 1: Representación gráfica de la distribución volumétrica de carga y el punto de observación. En 2(a) se muestra un punto fuera de la distribución. En 2(b) se muestra un punto dentro de la distribución, aislado del resto de los puntos fuentes mediante un volumen $\boldsymbol{V_\sigma}$

Tomando en cuenta que el operador divergencia opera sobre las variables no primadas se puede ingresar dentro de la integral:

$$\vec{\nabla}\,\vec{E}_{(r)} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho_{(\vec{r}')}\;\frac{\vec{\nabla}\,\boldsymbol{A_r}}{R^2}\;dV'$$

Y como,

$$\frac{\vec{\nabla}\,\boldsymbol{A_r}}{R^2} = \begin{cases} 0 \;\; cuando\; r \neq r' \\ 4\pi\delta_{(\vec{r}-\vec{r}')}\; cuando\; r = r' \end{cases}$$

Resultando que para cualquier punto fuera de la distribución – ver Fig. 1(a) – la divergencia del campo electrostático es nula, lo cual era de esperarse ya que las fuentes escalares del campo electrostático son las propias cargas eléctricas. En el interior de la distribución – ver Fig. 1(b) –, para el cálculo de ∇ · E, procederemos a aislar el punto de observación y a dividir la integral en dos partes: una parte sobre el volumen de la distribución menos el punto de observación considerado, y otra parte sobre el propio punto de observación.

Llamando el volumen del punto de observación V_σ y siendo éste en principio de forma esférica, de radio σ, tal que σ tienda a cero a partir de un valor inicialmente ya pequeño, se tiene:

$$\vec{\nabla}\,\vec{E}_{(r)} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V-V_\sigma} \rho_{(\vec{r}')}\;\frac{\vec{\nabla}\,\boldsymbol{A_r}}{R^2}\;dV' \;+\; \int_{V_\sigma} \rho_{(\vec{r}')}\;\frac{\vec{\nabla}\,\boldsymbol{A_r}}{R^2}\;dV'$$

En la primera de las integrales, r´ se paseará solo por los puntos de $V - V_\sigma$ por lo que $r \neq r'$ y $\frac{\vec{\nabla}\,\boldsymbol{A_r}}{R^2} = 0$.

Mientras que en la segunda de las integrales, ρ_v se comportará como una constante, en particular asumirá el valor que le corresponde en el punto de observación: $r = r'$ y $\frac{\vec{\nabla}\,\boldsymbol{A_r}}{R^2} = 4\pi\delta_{(\vec{r}-\vec{r}')}$ de tal suerte que se obtiene:

$$\vec{\nabla}\,\vec{E}_{(r)} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_\sigma} \rho_{(\vec{r}')}\;\frac{\vec{\nabla}\,\boldsymbol{A_r}}{R^2}\;dV' \;=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_\sigma} \rho_{(\vec{r}')}\;4\pi\delta_{(\vec{r}-\vec{r}')}\;dV' \;=\; \frac{\rho_{(\vec{r})}}{\varepsilon_0}$$

V. Ley de Gauss

Obtenido el resultado anterior que corresponde con una de las ecuaciones de Maxwell en electrostática, procederemos a integrar ambos miembros de la ecuación sobre el espacio y concluiremos en la ley de gauss.

La ley de gauss resulta muy útil cuando se han de resolver distribuciones de carga de gran simetría, ya que calculando la integral sobre una superficie donde el flujo sea uniforme podemos alcanzar rápidamente el valor del campo o potencial.

Estos casos son muy aplicados para calcular el campo a través de cavidades esféricas concentras o en condensadores de placas paralelas.

$$\iiint \vec{\nabla}\,\vec{E}_{(r)}\;dV = \;\iiint \frac{\rho_{(\vec{r})}}{\varepsilon_0}\;dV = \;\frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

Y, por la ley de gauss vista en análisis II

$$\iiint \vec{\nabla}\,\vec{E}_{(r)}\;dV = \;\oiint \vec{E}\;\;dS$$

Donde, si fuera posible encerrar a la carga con una superficie (superficie gaussiana) donde el campo sea constante ya tendríamos resuelto distintos ejercicios como los antes mencionados.

$$E \oiint dS = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

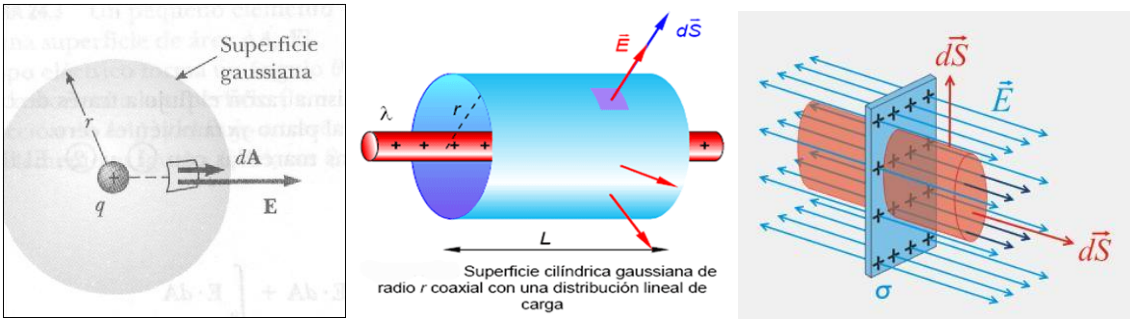

Figura 2: Distintas superficies gaussianas para diferentes distribuciones. Primero una carga puntual, segundo una línea infinita y por ultimo un plano infinito.

VI. Conclusiones

Hemos aplicado la función Delta de Dirac para discretizar cargas y llegar a resolver casos que podrían resultar complejos, de una manera muy sencilla.

Vamos a destacar sobre todo el potencial de los teoremas y definiciones aprendidos durante estos años y su directa aplicación con la física moderna. De ahora en adelante, es nuestro trabajo utilizar las herramientas adquiridas de la mejor manera para lograr eficacia a la hora de resolver ya sea analítica o prácticamente nuestros problemas ingenieriles.

"Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella" ***Carl Friedrich Gaus.***

Referencias

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 1er. Cuatrimestre 2014, pp.88-95. 2014.

[2] Richard Feynman - Física Volumen 2 "Electromagnetismo y Materia" – Ed. Iberoamericana.

[3] Serway-Jewett – "Física para ciencias e ingenierías con Física moderna" – Vol. 2 ed. Thomson.

[4] C. Carletti - Apuntes de cátedra Electromagnetismo UNS.

[5] Reitz/Milford/Christy. Fundamentos de la teoría electromagnética. Addison-Wesley Iberoamericana, USA, 1984.