Transformada de Laplace: Análisis de circuitos en el dominio S

Trippel Nagel Juan Manuel
Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Juan-004@hotmail.com
Noviembre 2011

Resumen: En el presente informe se detallará una de las aplicaciones de la teoría de variable compleja, en particular la transformada de Laplace, en el análisis de circuitos eléctricos propio de la ingeniería eléctrica. Se mostrara como, mediante el uso de transformadas de Laplace y combinado con la metodología de análisis de circuitos por leyes de Kirchhoff se obtendrá un análisis detallado de circuitos de segundo orden. Como se verá el dominio S permite una generalización a la utilización de Fasores los cuales no pueden ser aplicados en condiciones no estacionarias de los circuitos de corriente alterna (non-ac-steady-state).

Palabras clave: Laplace, Kirchhoff, segundo orden, dominio S, Fasores, non-ac-steady-state, función de transferencia, salida, entrada.

I. INTRODUCCIÓN

La *transformada de Laplace* L es definida como una regla $L\{f(t)\} = F(s)$ que asocia a la función de tiempo $f(t)$ con una función $F(s)$, de una variable compleja s.

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$F(s)$ es llamada la transformada de Laplace de $f(t)$. El plano complejo donde se encuentra definido s y en el cual $F(s)$ toma valores es llamado *dominio S*. La transformada de Laplace puede ser usada para resolver ecuaciones diferenciales e íntegro-diferénciales, como las son las ecuaciones del análisis de circuito básico. La ecuación o ecuaciones son primeramente transformadas y luego resueltas en términos algebraicos. Las formas de estas ecuaciones en el dominio S son similares a las obtenidas mediante el uso de análisis fasorial, con la variable s reemplazando la variable de fasor $j\omega$. Por lo cual no es de sorprender que los mismos métodos generales utilizados en el contexto de Fasores puedan ser igualmente aplicados en el dominio S, mas notablemente análisis nodal y de malla usando impedancias para caracterizar los elementos del circuito RLC.

II. ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Veremos cómo las formas tomadas por las leyes de circuitos más populares cuando son transformadas al dominio S. Considerando la malla y el nodo de la Fig. 1. Aplicando las leyes de Kirchhoff tenemos que:

$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) = 0$$

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$$

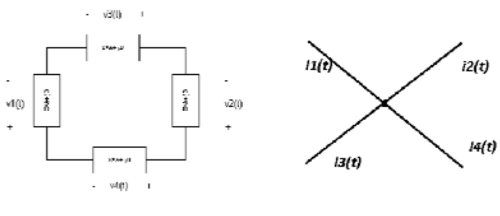

Figura 1: Esquema de circuito malla y nodo en el dominio temporal

Transformando estas ecuaciones se tiene que:

$$V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) + V_4(s) = 0$$

$$I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) + I_4(s) = 0$$

La suma de las caídas de potencial alrededor de un loop cerrado es cero, y las corrientes entrando a un nodo suman cero, aun después de aplicar la transformación de Laplace. Las leyes para el voltaje y corrientes de Kirchhoff permanecen invariantes en el dominio S, como se observa en la Fig. 2.

A. Leyes de los elementos RCL

Considerando las leyes de los elementos $RLC,$ y luego transformando ambos lados.
Se tiene que la ley de Ohm

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$V_R(s) = RI_R(s)$$

La ley de elemento para un inductor es

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

Usando la regla de la derivada, en el dominio S

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

Mientras que la ley de elemento para un capacitor es

$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t)$$

Transformando se tiene

$$I_C(t) = sCV_C(s) - Cv_C(0^-)$$

Despejando la ecuación para $V_C(s)$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{1}{s}v_C(0^-)$$

B. Impedancia

El factor de proporcionalidad entre el voltaje y la corriente en el primer término es la *impedancia* $Z(s)$. Definimos la impedancia $Z(s)$de un elemento RLC como el *cociente* de $V(s)$ con $I(s)$ *cuando todas las*

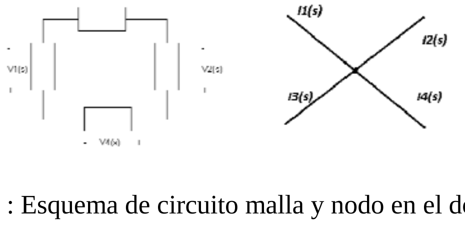

Figura 2 : Esquema de circuito malla y nodo en el dominio S *condiciones iniciales son cero,* es decir: $V(s) = Z(s)I(s)$.

Aplicando esto a las ecuaciones antes citadas se tienen las siguientes impedancias:

$$Z_R(s) = R$$

$$Z_L(s) = sL$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

C. Función de transferencia

Algunas veces deseamos saber la relación entre una fuente particular llamada *entrada* y otra variable de circuito llamada *salida.* Resulta que el análisis en el *dominio S* es particularmente útil para análisis *entrada-salida.* Para un circuito con *entrada* $V_i(s)$ y *salida* $V_o(s)$, se define la función de transferencia $H(s)$ como el radio en el dominio S entre la *entrada* y la *salida* cuando todas las condiciones iniciales son cero.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Con esto se tiene que el valor en el *dominio S* de *salida* para cualquier *entrada* es el producto de la función de transferencia y la *entrada.* Con esto si se conoce $H(s)$ se puede predecir para cualquier *entrada* la *salida* generada.

$$V_o(s) = H(s)V_i(s).$$

Ahora consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo caracterizado por la siguiente ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} x + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x + \cdots + a_0 x = b_m \frac{d^m}{dt^m} u + \cdots + b_0 u$$

Donde $n \geq m,$ las a y b son coeficientes constantes, y $x(t)$ es la respuesta del sistema correspondiente a la entrada $u(t)$. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación, obtenemos la ecuación transformada:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0) X(s) = (b_m s^m + \cdots + b_0) U(s)$$

Donde $X(s)$ y $U(s)$ denotan las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $u(t)$ respectivamente. La función de transferencia del sistema $H(s)$ se define como:

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$$

Y el sistema puede representarse en forma de diagrama por la operación dentro de la caja de la Fig.3 Esta representación se conoce como diagrama de bloque entrada-salida del sistema.

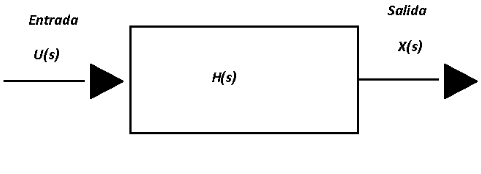

Figura 3: Diagrama de bloque de entrada-salida

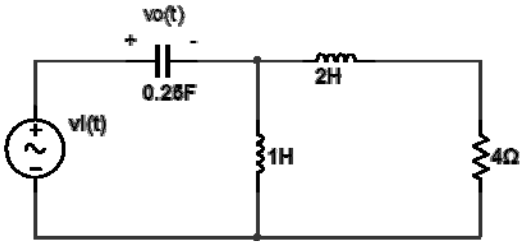

Figura 4: Circuito en el dominio temporal

La ecuación $X(s) = 0$ se conoce como ecuación característica del sistema, su orden determina el orden del sistema y sus raíces se conocen como los polos de la función de transferencia. De la misma manera, las raíces de $U(s)$ son los ceros de la función de transferencia.

En la práctica, un sistema completo puede formarse de cierto número de componentes, cada uno caracterizado por su propia función de transferencia y relacionado con una operación en caja. Así que la función de transferencia de entrada-salida del sistema completo se obtiene por las reglas del algebra de diagrama de bloques. Como $H(s)$ puede escribirse

$$H(s) = \frac{b_m}{a_n}\frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Donde $z_i s$ y $p_i s$ son los ceros y los polos de la función de transferencia respectivamente, observemos que $H(s)$ es conocida, excepto por un factor constante, si se conocen las posiciones de todos los polos y los ceros. Por consiguiente, con frecuencia se usa un dibujo de los polos y los ceros de $H(s)$ como ayuda en el análisis grafico de la función de transferencia (una convención común es marcar la posición de un cero mediante un circulo O y la de un polo mediante una cruz X. Como los coeficientes de $X(s)$ y $U(s)$ son reales, todas las raíces complejas suceden siempre en pares complejos conjugados, asi que el dibujo polo-cero es simétrico con respecto al eje real.

III. CASO DE ESTUDIO

Estudiaremos como aplicar los métodos de análisis para el circuito RCL de la Fig. 4.

Notar la ausencia total de generadores de condiciones iniciales en el circuito en el dominio S, (Fig. 5) una consecuencia de exigir todas las condiciones iniciales igual a cero.

Primero procedemos a computar $V_o(s)$. La impedancia equivalente de los tres elementos más a la derecha:

$$Z_o(s) = \frac{(s)(2s + 4)}{s + (2s + 4)} = \frac{2s^2 + 4s}{3s + 4}$$

Luego, por división de voltaje:

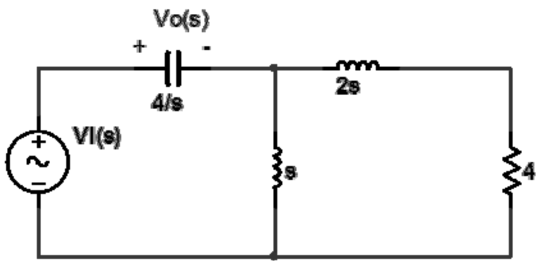

Figura 5: Circuito en el dominio S

$$V_o(s) = \frac{\frac{4}{s}}{\frac{4}{s} + Z_o(s)} V_i(s)$$

$$= \frac{6s + 8}{s^3 + 2s^2 + 6s + 8} V_i(s)$$

Resolviendo en términos de la entrada, $H(s)$ se encuentra dividiendo ambos lados por $V_i(s)$.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{6s + 8}{s^3 + 2s^2 + 6s + 8}$$

Donde expresando la función en términos de polos y ceros:

$$H(s) = \frac{6\left(s + \frac{4}{3}\right)}{(s + 1.51839)(0.058s^2 - 5.21074)} = \frac{6\left(s + \frac{4}{3}\right)}{0.058(s + 1.51)(\, s^2 - 89.86)}$$

Con polos reales $s = -1.51839$ e imaginarios $s_1, s_2 = \pm\sqrt{89.86}i$.
Ceros reales $s = -\frac{4}{3}$

IV. Conclusiones

Se puede apreciar claramente como el uso de transformadas de Laplace resulta en una poderosa herramienta para el análisis de circuitos de segundo orden. Mediante la cual, el análisis de circuitos se simplifica al trabajar en el dominio S, en el cual se trabaja como si se estuviera en estado estacionario, y con la función de transferencia encontrada se puede obtener mucha información sobre el comportamiento del circuito, en ella tienen especial importancia tanto los polos como los ceros para indicar características como sea respuesta en frecuencia, estabilidad, frecuencia de quiebre, entre otros.

Referencias

[1] David E. Johnson, Johnny R. Johnson, John L. Hilburn, Peter D. Scott, “Electric Circuit Analysis”, *Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.* Tercera edición 1997, pp. 520-531.

[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, pp. 177-179.