Aplicaciones de la transformada de Laplace en probabilidad y estadística.

Geddes, Tomás.

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Tomas-geddes@hotmail.com
octubre de 2014

Resumen: En este trabajo se resumen las aplicaciones de las transformadas de Laplace en el área de la probabilidad y estadística como una herramienta para determinar la función de Densidad de probabilidad para la suma de dos variables aleatorias continuas e Independientes para el estudio de las funciones de distribución, la esperanza y la varianza.

Palabras clave: Transformadas de Laplace, función de densidad de probabilidad, esperanza, varianza.

I. INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo se detalla la utilización de la transformada de Laplace tanto para determinar la función densidad de probabilidad para la suma de dos variables aleatorias continuas e independientes, como para el cálculo de la esperanza y la varianza, usando para realizar dichos cálculos las propiedades de transformaciones vistas en clase.

Cuando las variables de distribución son continuas las tanto las funciones de densidad y distribución, como la esperanza y la varianza son integrales evaluadas desde 0(cero) hasta∞ (infinito) lo que permite aplicar en algunas distribuciones las transformadas de Laplace.

II. DESARROLLO:

A. *Uso de las transformadas de Laplace en el probabilidad*

Sea t una variable aleatoria continua no negativa y sea f(t) su función de densidad de probabilidad.

La transformada de Laplace de esta función de densidad de probabilidad es:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

$$F(0) = \int_0^\infty f(t)e^{-0t}dt = \int_0^\infty f(t)dt = 1$$

Una de las propiedades de las funciones de densidad es que el área bajo la curva de la función debe ser 1, por lo tanto para comprobar esa propiedad basta hacer F(0).

$$F'(S) = \frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty -tf(t)e^{-st}dt = -L\{tf(t)\} \tag{2}$$

F´(0)= $-\int_0^{\infty} tf(t)dt$=-E(t)   E(t) es la esperanza, media, o valor esperado de f(t).

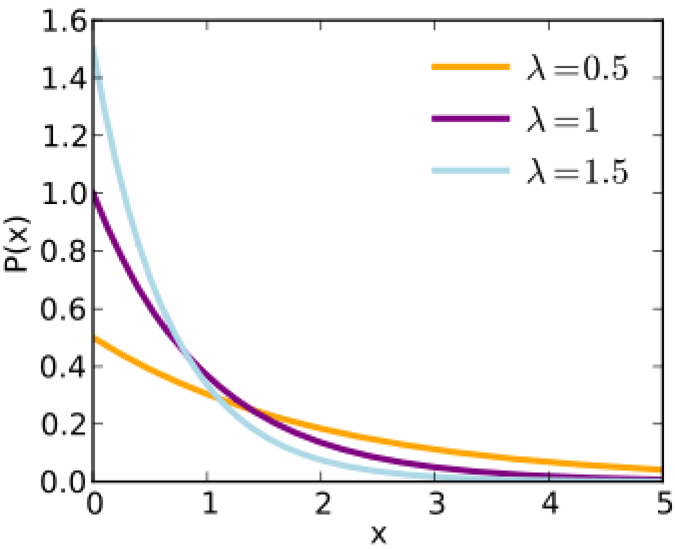
F´´(S)=$\frac{d^2}{ds^2}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$=$\int_0^{\infty} t^2 f(t)e^{-st}dt$ = L{t^2f(t)}

F´´(0)= $\int_0^{\infty} t^2 f(t)dt$ =E(t^2)

La varianza de t se define como E$(t^2) - (E(t^2))^2$ se puede escribir entonces como F´´(0)-$F'(0)^2$.

Dicho esto podemos calcular entonces la esperanza y la varianza de la función de densidad exponencial, que es de la forma:

f(t)=$\lambda e^{-\lambda t}$



La esperanza la definimos anteriormente como - F´(0)= L{tf(t)}

L{tf(t)}=(-1)$\frac{d}{ds}$(L{f(t)})= (-1)$\frac{d}{ds}$L{ $\lambda e^{-\lambda t}$}=$\frac{1}{\lambda}$, que es la esperanza de la función de densidad exponencial.

Y la varianza la definimos como F´´(0)-$F'(0)^2$.

F´´(0)-$F'(0)^2$= L{t^2f(t)} - $(\frac{1}{\lambda})^2$ =$\frac{d^2}{ds^2} L\{ \lambda e^{-\lambda t}\}$ - $(\frac{1}{\lambda})^2$= $(\frac{2}{\lambda^2})$ - $(\frac{1}{\lambda})^2$= $(\frac{1}{\lambda})^2$, que es la varianza de una función exponencial.

B. Distribución para la suma de dos variables aleatorias independientes.

Otra aplicación de la transformada de Laplace es la determinación de la funcion densidad de probabilidad para la suma de dos variables aleatorias continuas e independientes.

Supóngase que se tienen dos variables aleatorias continuas, no negativas e independientes $t_1\ y\ t_2$, con funciones de densidad de probabilidad $f_1(t)$ y $f_2(t)$ respectivamente, se define una nueva variable aleatoria t_3 como la suma de los valores de las variables aleatorias $t_1\ y\ t_2$, la función densidad de probabilidad de la nueva variable aleatoria será la convolución de las funciones de densidad de probabilidad para las variables $t_1\ y\ t_2$.

$$f_3(t) = \int_0^t f_1(\alpha)\, f_2(t-\alpha) d\alpha = \int_0^t f_1(t-\alpha)\, f_2(\alpha) d\alpha$$

La operación de convolución es conmutativa.

La transformada de esta función de densidad de probabilidad, de acuerdo a la propiedad de la transformada de Laplace para la convolución, está dada por:

$$F_3(S) = \int_0^\infty f_3(t) e^{-st} dt = F_1(S) F_2(S)$$

La anti transformada de permite obtener la función de densidad de probabilidad para la nueva variable.

Si nuestras funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ fuesen funciones exponenciales de la forma $\lambda e^{-\lambda t}$

Entonces:

$$F_3(S) = F_1(S) F_2(S) = L\{f_1(t)\}\, L\{f_2(t)\} = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^2$$

$$f_3(s) = L^{-1}\ \{F_3(S)\} = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

III. CONCLUSIÓN

La transformada de Laplace es muy importante para procesos en donde se toman variables continuas, como puede ser, el valor esperado del tiempo de funcionamiento de alguna maquina o aparato. También para calcular las medidas de dispersión de una función de distribución exponencial, que puede utilizarse para calcular el tiempo que tarda una partícula radioactiva en desintegrarse o la datación de un fósil o cualquier tipo de materia orgánica mediante la técnica de carbono 14, o el tiempo en que puede transcurrir, en un servicio de urgencias para la llegada de un paciente.

Los mencionados anteriormente son aspectos de la vida en general que se ven facilitados u optimizados por el uso de la transformada de Laplace para su cálculo preciso.

REFERENCIAS:

[1] "USO DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE Y Z EN EL ÁREA DE PROBABILIDAD" www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/Paginas/MateParaTodos/apoyo/PlaticaTransformadasJorgeOlvera.pdf, [Acceso el 26 de marzo de 2015]

[2] es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace, [Acceso el 25 de marzo de 2015]

[3] G. Calandrini, "Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de variable Compleja".

[4] Dr. Beatriz Marrón "Probabilidad, variable aleatoria y estadística" año 2014.