

Transformada de Laplace en Restauración de Imágenes

Timi, Matías S.

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
matias.s.timi@ieee.org
Febrero 2015

Resumen: En esta nota de aplicación se analizan las técnicas de procesamientos de imágenes basados en ecuaciones diferenciales a través de la integración temporal que requieren mucho tiempo computacional, por lo cual se propone como solución el uso de la Transformada de Laplace que permite solucionar los problemas de dependencia del tiempo. El procedimiento requiere el cálculo numérico de una Transformada inversa de Laplace, luego se analiza el rendimiento y la eficiencia de ambos métodos.

Palabras clave: Transformada de Laplace, procesamiento de imágenes, integración temporal.

I. INTRODUCCIÓN

Muchos procesos físicos del mundo real, como modelos financieros, ingeniería térmica y ciencias ambientales, son modelados a través de problemas no lineales dependientes del tiempo. Hay varios enfoques para la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, éstos implican métodos numéricos, tanto paralelos y secuenciales, que están continuamente siendo investigados y racionalizados.

El método estándar para la resolución de problemas dependientes del tiempo es el esquema de marcha que por lo general se comienza dividiendo el problema en partes y luego se resuelve secuencialmente en puntos de tiempo sucesivos. La dependencia de la solución en el paso anterior hace que los problemas sean difíciles de resolver en un entorno paralelo. Este tipo de métodos incluye el método de Euler, los métodos de Runge-Kutta, y métodos de múltiples pasos.

Los métodos para transformar integrales se han utilizado con frecuencia durante la solución de problemas físicos. El enfoque más reciente es utilizar el concepto de la teoría de los métodos de transformación para problemas de dominio de tiempo en un espacio transformado que no involucra al tiempo. Los métodos de la transformada de Laplace para problemas dependientes del tiempo, transforman problemas parabólicos en problemas elípticos en el espacio transformado de Laplace, los cuales han sido considerados por muchos autores [2-3].

A. Idealización de una restauración

Dada una imagen y una región Ω dentro de la misma, el problema de la restauración consiste en la modificación de los valores de la imagen de los píxeles en Ω , de manera tal, que esta región no se destaque con respecto a sus alrededores. El propósito de reparación podría ser para restaurar las partes dañadas de una imagen (por ejemplo, una vieja fotografía con pliegues y rasguños que han dejado vacíos de imagen), o eliminar elementos no deseados presentes en la imagen (por ejemplo, un micrófono que aparece en un fotograma de la película) [4].

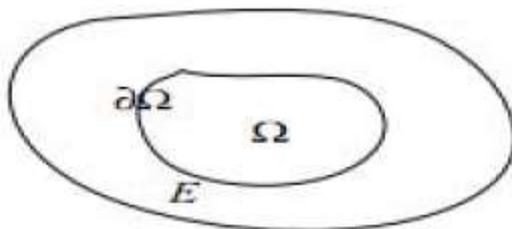


Figura 1: Imagen defectuosa

Si consideramos una imagen bidimensional en tonos de grises definida por:

$$I_0(i, j): [0, M] \times [0, N] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } [0, M] \times [0, N] \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Vamos a construir una familia de imágenes de la siguiente manera:

$$I(i, j, n): [0, M] \times [0, N] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ De manera que } I(i, j, 0) = I_0(i, j) , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(i, j, n) = I_R(i, j)$$

Podemos escribir el algoritmo de forma general como:

$$I^{n+1}(i, j) = I^n(i, j) + \Delta t I_t^n(i, j) , \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

Donde:

- I_R es la imagen recuperada.
- n determina el tiempo de restauración.
- i, j son las coordenadas del pixel.
- Δt es la tasa de mejora.
- $I_t^n(i, j)$ es la actualización de la imagen $I^n(i, j)$.
- Ω es la región a ser restaurada.

B. Funcionamiento interno del algoritmo

Las técnicas de restauración han evolucionado a lo largo del tiempo. Al principio se basaban en técnicas aplicadas en el dominio de la frecuencia. Actualmente se basan en métodos algebraicos y la manipulación de grandes sistemas de ecuaciones. En general no existe una técnica universal de restauración de imágenes, sino que varía según la obra y el restaurador. Sin embargo, la base de la metodología [5] es similar:

- 1- La sección perdida o dañada se rellena utilizando información del resto de la imagen.
- 2- La estructura de la zona circundante a la parte deteriorada es continuada hacia adentro de la región faltante, prolongando las líneas que llegan al borde.
- 3- Las diversas regiones generadas, dentro de la zona dañada, producto de la prolongación de las líneas de contorno, son rellenadas con el color que se corresponda con el de la correspondiente frontera.
- 4- Finalmente, se pintan los pequeños detalles para mantener la uniformidad.

Para realizar el algoritmo se necesita traducir los conceptos del in-painting manual expresado anteriormente a lenguaje matemático. Vale destacar que el algoritmo realiza repetidamente los pasos 2 y 3.

II. IMAGE IN-PAINTING

La restauración de imagen, en inglés In-painting, también conocido como interpolación de imagen o video, es el proceso de reconstruir partes perdidas o deterioradas de imágenes y vídeos. Por ejemplo, en caso de una pintura valiosa esta tarea sería realizada por un artista experto en restauración de imágenes. En el mundo digital, in-painting se refiere a la aplicación de algoritmos sofisticados para sustituir partes perdidas o corrompidas de los datos de la imagen, principalmente pequeñas regiones o quitar pocos defectos.

A. Evolución del In-Painting

El modelo de TV (Total Variation) fue el pionero en la restauración de imágenes, propuesto por Rudin, Osher y Fatemi [6]. Aunque esta técnica era eficaz para in-painting preservando al mismo tiempo los detalles de los bordes, no hacía posible satisfacer "la conexión y el principio holístico" mientras que la región dañada era más ancha que la pintura en objeto. Chan y Shen [6] propusieron un nuevo modelo llamado CDD (Curvature-Driven Diffusions), con el objetivo de lograr el principio de conectividad, inspirándose en el modelo de la TV. Ellos notaron que en el modelo de TV el coeficiente de difusión dada por $D = \frac{1}{|v \cdot u|}$ solamente dependía de la fuerza de contraste o las líneas de nivel y por lo tanto era independiente de la información geométrica. Para resolver este problema Chan y Shen introdujeron la curvatura

$k = k(x, y) = \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ para redefinir el coeficiente de difusión D , incluyendo la función $g = g(|k|)$. De esta manera el coeficiente de difusión es fortalecido donde sea necesario, tomando la información geométrica codificada en k . El nuevo coeficiente de difusión es luego dado por

$$D = \frac{g(|k|)}{|\nabla u|} \quad \text{donde } g(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0 \\ \infty & \text{si } s = \infty \\ s^p & \text{si } 0 < s < \infty \end{cases} \quad (1)$$

Para asegurarse de que los puntos geométricos que tienen una mayor o infinita curvatura y por lo tanto se necesitan mejorar la reconexión, la ecuación $g(\infty) = \infty$ puede ser utilizada aumentando D al máximo valor posible.

Para evitar que el modelo CDD se deteriore en el modelo de la TV, $g(0)$ debe ser elegido cero, pero $g(0) = a \neq 0$ puede destruir potencialmente el principio de la conectividad. Al darse cuenta de esto, Chan y Shen sugirieron [7] $g(s) = s^p$ con $s > 0, p \geq 1$. CDD en la restauración está dada entonces por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \left(\frac{g(|k(u)|)}{|\nabla u|} \right) \nabla u && \in \Omega \\ u &= u^0 && \in E \end{aligned} \quad (2)$$

Dónde Ω es la región dañada y E es la región que rodea la región dañada (Figura 1).

III. ALGORITMOS BASADOS EN LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace [8] $F(s)$ de una función real $f(t)$ definida para $t \geq 0$ es

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

En este método de transformación se realizan ecuaciones diferenciales a lo largo del eje temporal. Un conjunto de ecuaciones diferenciales mutuamente independientes puede ser hallado para diferentes valores de los parámetros. Puede verse que el problema original que sólo podía ser resuelto secuencialmente en el dominio temporal, ahora se puede resolver como varios problemas paramétricos independientes de los valores en la frontera. Así, utilizando la tecnología computacional paralela para la resolución de los mismos.

A. Uso de la transformada de Laplace para restaurar imágenes en 2D

Desde que las soluciones a los pasos intermedios de la ecuación (2) por lo general no son de interés para los problemas en la interpolación de imágenes, es posible aplicar la transformada de Laplace. Para evolucionar la solución a la ecuación (2) a partir de $u(x, y, T_j)$ a $u(x, y, T_{j+1})$, la técnica de linealización es necesitada debido a la no linealidad. Cada solución en este bucle iterativo es producida para resolver la ecuación original en el espacio transformado y aplicar la transformación inversa. La convergencia para el paso de tiempo de T_j a T_{j+1} es lograda cuando la diferencia entre las sucesivas actualizaciones alcanza algún criterio de convergencia.

El eje temporal se divide en j partes. Diremos μ sea la solución aproximada de $u(x, y, T_{j+1})$. El problema linealizado de la ecuación (1) definido en el intervalo de tiempo (T_j, T_{j+1})

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left(\frac{g(|k(u)|)}{|\nabla u|} \right) \nabla u \quad \in \Omega (T_j, T_{j+1}) \quad (3)$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (3) se transforma la función $u(x, y)$ a $U(x, \lambda_p)$, así obteniendo el resultado de la ecuación diferencial

$$\lambda U(x, y, \lambda) - u(x, y, T) = \left(\frac{g(|k(u)|)}{|\nabla u|} \right) \nabla^2 U(x, y, \lambda_p) \quad \in \Omega \quad (4)$$

Las soluciones para la ecuación (4) se generan por varios parámetros de $\lambda_p = \frac{p}{T} \ln 2$, $p = 1, 2, 3, \dots, m$, donde m es par si uno elige calcular la inversa de Laplace de U con el método Stehfast. Con el fin de reconstruir la solución u en el espacio original, la transformada inversa de Laplace basada en Stehfast se calcula utilizando la fórmula ponderada (5), donde w_p son los pesos.

$$u(x, y, T) = \frac{\ln 2}{T} \sum_{p=1}^m w_p U(x, \lambda_p) \quad (5)$$

IV. RESULTADOS Y COMPARACIONES

En esta sección, demostraremos la técnica anterior usando una imagen alterada con el fin de probar el rendimiento de la transformación de Laplace en el algoritmo de las imágenes. El principal objetivo de estas pruebas es examinar el tiempo computacional. Estos son obtenidos mediante el uso de la técnica actual y se comparan con los de la integración temporal.

Numerosos experimentos [9] se realizaron utilizando un equipo, que consta de dos dobles núcleos cada uno de 2,4 GHz AMD Opteron 2216 y seis de 4 núcleos, cada uno de 2,2 GHz AMD Opteron 8354 conectada con canal de memoria por una banda infinita alimentado a través de Linux. Y se obtuvieron los siguientes resultados.



Imagen	Lago		
Número de Procesadores	Transformada de Laplace Secuencial	Transformada de Laplace paralela	Tiempo de Integración CPU
M=12	1.28	0.18	0.22
M=10	0.77	0.12	0.22
M=6	0.46	0.10	0.22

Tabla 1. Rendimiento obtenido con la imagen del lago

V. CONCLUSIONES

En esta nota se presenta un algoritmo no lineal de la Transformada de Laplace rápido y eficiente para restaurar imágenes. Ejemplos numéricos son utilizados para demostrar tiempos de computación paralela y secuencial. Los resultados muestran que los tiempos de computación son favorables y que el método de Laplace es un conjunto de algoritmos extremadamente adecuados para esta labor.

REFERENCIAS

- [1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, pp 97-200, 2002.
- [2] L. Liu, C.H. Lai; S. Zhou, F. Xie, L. Rui, "Two-level time-domain decomposition based distributed method for numerical solutions of pharmacokinetic models". Computers in Biology and Medicine, 41, pp. 221-227, 2011.
- [3] Z. Xu, X. Lian, L. Feng, "Image In-painting algorithm based on partial differential equation", ISECS International Colloquium on Computing, Communication, Control and Management, 2008.
- [4] Article: "InPainting". Published by: Marcelo Bertalmío, Vicent Caselles, Simon Masnou, Guillermo Sapiro [Internet] <http://math.univ-lyon1.fr/~masnou/fichiers/publications/survey.pdf>
- [5] Wikipedia, La encyclopedia libre. [internet] http://es.wikipedia.org/wiki/Restauraci%C3%B3n_de_imagen
- [6] Image Reconstruction. [Internet] http://www.math.ucla.edu/~imagers/htmls/old_rec_inp/recB4march28.html
- [7] T. Chan, J. Shen, "Non-texture in-painting by curvature-driven diffusions". SIAM Journal on Applied Mathematics, 62, pp. 1019– 104, 2002.
- [8] Calandrini, Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja. 2do cuatrimestre, 2014.
- [9] IEEE Xplore Digital Library. "A Laplace transform method for the image in-painting". Distributed Computing and Applications to Business, Engineering & Science. Sept. 2, 2013 to Sept. 4, 2013 [Internet] http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=6636455 .