Impedancia de un Condensador

Valentin Taffetani

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
valentin.taffetani@gmail.com
Julio 2011

Resumen: La transformada de Lapace es una herramienta muy poderosa para la resolución de circuitos RCL. La ecuación diferencial que esta en el dominio del tiempo mediante la transformada de Lapace pasan al dominio de la frecuencia, efectuando las respectivas operaciones algebraicas y si es necesario operar por Thévenin o Norton ordenar el circuito luego aplicando la Transformada Inversa de Laplace obtenemos la respuesta en el domino del tiempo. En este artículo se desarrolla una de sus variadas aplicaciones: impedancia de un condensador, respuesta en frecuencia.

Palabras clave: transformada, Laplace, impedancia, respuesta en frecuencia.

I. INTRODUCCIÓN

El comportamiento de sistemas electrónicos complejos puede describirse de una forma mucho mas simple si se utiliza una herramienta matemática muy útil: la transformada de Laplace. Con esta herramienta es posible usar ecuaciones ordinarias en lugar de ecuaciones diferenciales para describir el comportamiento de sistemas electrónicos complejos. El ámbito de aplicación de esta transformada no queda reducido a los sistemas electrónicos. El comportamiento de cualquier sistema lineal, sea del tipo que sea, queda completamente descrito mediante las ecuaciones ordinarias obtenidas a través de la transformada de Laplace.

La transformación propiamente dicha es la siguiente:

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de x(t): Esta función se define para cualquier número complejo, s.

Obsérvese que para el caso particular s = $j\omega$, la transformada de Laplace coincide con la transformada de Fourier, y por lo tanto la respuesta en frecuencia de un sistema lineal se obtiene de la transformada de Laplace de su función de transferencia sin más que sustituir s por $j\omega$.

A continuación se enumeran algunas de las propiedades más interesantes de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(a \cdot x(t) + b \cdot y(t)) = a \cdot X(s) + b \cdot Y(s) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = s \cdot X(s) \tag{3}$$

$$\mathcal{L}\left(\int x(t)dt\right) = \frac{1}{s} \cdot X(s) \tag{4}$$

La primera propiedad nos indica que la transformada de Laplace es una transformación lineal. Las siguientes nos van a permitir tratar las ecuaciones diferenciales que rigen a los sistemas lineales como simples ecuaciones ordinarias en el dominio de la transformada de Laplace (plano complejo 's'). Para ello hacemos las siguientes sustituciones en las ecuaciones del sistema:

$$\frac{dx(t)}{dt} \to s \cdot X(s) \; ; \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} \to s^2 \cdot X(s) \; ; \quad \int x(t)dt \to \frac{1}{s} \cdot X(s) \; ; \tag{5}$$

y las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo se convierten en ecuaciones ordinarias (cociente de polinomios de 's') en el dominio de la transformada de Laplace.

II. IMPEDANCIA DE UN CONDENSADOR. RESPUESTA EN FRECUENCIA

Sabemos que en un condensador el voltaje entre sus placas es proporcional a la carga almacenada e inversamente proporcional a la capacidad. Además podemos expresar la carga como la integral de la corriente que entra al condensado a lo largo del tiempo, de modo que obtenemos:

$$v(t) = q(t)/C\,; \qquad v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{6}$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace según las reglas de (5) y obtenemos:

$$V(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \qquad Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \tag{7}$$

En el dominio de la transformada de Laplace la impedancia del condensador es 1=Cs.

Para ver como depende la impedancia del condensador con la frecuencia sustituimos s por $j\omega$ en (7) y obtenemos:

$$Z(\omega) = \frac{1}{Cj\omega}$$

que, como todos sabemos, es la impedancia de alterna del condensador.

III. CONCLUSIONES

La transformada de Laplace es una herramienta matemática que se emplea en el análisis temporal y frecuencial de circuitos (haciendo $s = j\omega$) y tiene las siguientes ventajas:

- El resultado obtenido es la respuesta completa, con las condiciones iniciales dadas. No es necesario realizar cálculos adicionales para obtener la solución de la ecuación homogénea ni ajustar los valores de las constantes de integración, tal como ocurre con la transformada de Fourier.
- La respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ se puede obtener a partir de la transformada de Laplace, analizando el circuito con condiciones iniciales nulas y realizando la sustitución $s = j\omega$.

REFERENCIAS

[1] "Electrónica Analógica. Respuesta en frecuencia. Transformada de Laplace." [Internet] disponible en http://www.ele.uva.es/~jesus/eanalogica/transf_laplace.pdf [consultada el 4 de julio de 2011].

[2] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

[3] "Transformada de Laplace en circuitos" [Internet] disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace_en_circuitos [consultada el 4 de julio de 2011].