Transformada de Laplace, Polos y Ceros en Análisis de Respuesta de Frecuencia.

Nicolás Supervielle Brouques

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Niko_8_b@hotmail.com

Marzo 2011

Resumen: Mostraremos la aplicación de teoría de funciones de variable compleja en el marco de la ingeniería electrónica. Explicaremos el Análisis de Respuesta de Frecuencia de sistemas lineales invariantes en el tiempo, que es una técnica donde una señal de prueba sinusoidal de entrada es usada para medir y obtener información relevante del sistema lineal que se está estudiando. Específicamente usaremos la Transformada de Laplace para la transformación de ecuaciones diferenciales que modelan frecuencia de entrada y salida en sistemas eléctricos a ecuaciones más sencillas, y la lectura de polos y ceros para determinar la estabilidad del sistema lineal, así como la resolución de circuitos usando Transformada de Laplace

Palabras clave: Laplace, Raíces, Polos, Ceros, Respuesta, Frecuencia.

I. INTRODUCCIÓN

La Transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil en electrónica ya que gracias a ella podemos representar el comportamiento de sistemas electrónicos complejos de forma más sencilla usando ecuaciones ordinarias en vez de ecuaciones diferenciales. Es importante destacar, que si bien en este documento mostramos la Transformada de Laplace aplicada en el ámbito de la ingeniería electrónica más específicamente en la parte de análisis de Respuesta en Frecuencia, la Transformada de Laplace puede describir el comportamiento de cualquier tipo de sistema lineal.

La transformación es la siguiente:

$$X(s) = L(x(t)) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

Donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de $x(t)$. Se define para cualquier número complejo, s.

En ingeniería electrónica el comportamiento de respuesta de frecuencia de sistemas lineales ante una señal de prueba es muy importante en el análisis y diseño de dichos sistemas. Para este estudio además de realizar Transformaciones de Laplace de las ecuaciones diferenciales que modelan las estimulaciones y respuestas del sistema, veremos el significado de los polos y ceros respecto a la estabilidad del sistema abstrayéndonos de su construcción real física, solo calificamos esa construcción y vemos si satisface el comportamiento deseado, y de esta forma, con esta información, podemos luego modificar la estructura física salvando los problemas para obtener lo que deseamos del sistema.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

Si tenemos un sistema electrónico (centrándonos únicamente en sistemas lineales e invariantes en el tiempo), y lo estimulamos dando una entrada o fuerza al sistema, este produce una salida o respuesta. Esa respuesta ante una entrada tiene un cambio, esa razón es lo que se llama función de transferencia (*figura 1*).

Las funciones de transferencia se usan frecuentemente en ingeniería para caracterizar la relación entrada-salida de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, y juegan un papel importante en el análisis y diseño de dichos sistemas.

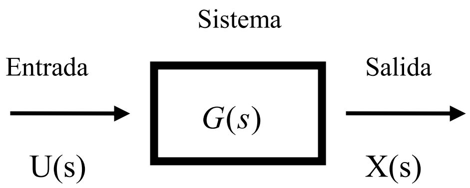

Figura 1: Diagrama de la función de transferencia.

La función de transferencia esta definida como la razón de la Transformada de Laplace de la salida del sistema respecto a la Transformada de Laplace de la entrada, bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero, esto es, estando inicialmente el sistema en reposo.

Consideremos un sistema lineal caracterizado por la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u \tag{2}$$

Donde $n \geq m$ y las a y las b son coeficientes constantes, $x(t)$ es la respuesta del sistema correspondiente a la entrada $u(t)$ aplicado en el tiempo $t = 0$.

A. Función de Transferencia usando Transformada de Laplace

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación (2) llegamos a:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) X(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U(s) \tag{3}$$

Donde $X(s)$ y $U(s)$ denotan las Transformadas de Laplace de $x(t)$ y $u(t)$ respectivamente.

Como se ve claramente que trabajar con la ecuación (3) es más sencillo que trabajar con (2). La función de transferencia del sistema, $G(s)$ se define como:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \tag{4}$$

Escribiendo:

$$P(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 \tag{5}$$

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \tag{6}$$

De (4), (5) y (6) la función de transferencia puede expresarse como:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{7}$$

B. Estabilidad del sistema usando Raíces, Polos y Ceros

La estabilidad de un sistema es una propiedad de fundamental importancia para los ingenieros. Podemos ver a un sistema estable como aquel que permanece en reposo cuando no es estimulado y luego de quitarle una estimulación retoma el reposo conforme el tiempo tiende a infinito. Las raíces de $Q(s)$ son los polos de la función de transferencia del mismo modo las raíces de $P(s)$ son los ceros de la función de transferencia. Es importante destacar que a pesar de que una función de transferencia caracteriza la dinámica del sistema, no proporciona información sobre la estructura física real del sistema, y sistemas totalmente distintos pueden tener la misma función de transferencia.

Un sistema esta formado por componentes, cada uno caracterizado por su función de transferencia. Entonces la función de transferencia del sistema completo es la siguiente:

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)}$$

Donde $z_i s$ y $p_i s$ son los ceros y los polos de la función de transferencia respectivamente, vemos que $G(s)$ es conocida excepto por un factor constante, si se conocen las posiciones de todos los polos y ceros.

Un polo simple, que realizando las pasos matemáticos correspondientes (fracciones simples y anti-transformando) tiene la respuesta en el tiempo $ce^{st}H(t)$, si este polo esta en la mitad izquierda del plano s, la respuesta en el tiempo tenderá a cero conforme $t \to \infty$. Si el polo esta a en la mitad derecha, la respuesta en el tiempo crecerá sin cota conforme $t \to \infty$ que es lo que no deseamos, entonces para que el sistema sea estable debe tener los polos simples en la mitad izquierda del plano s. Si el polo simple esta en el origen tenemos una respuesta en el tiempo que es un escalón $cH(t)$, esto no asegura que una entrada acotada termine en una respuesta acotada.

Un polo múltiple tiene respuesta en el tiempo $\left[c/(n-1)!\right]t^{n-1}e^{st}H(t)$, si el polo esta en la mitad izquierda del plano s, la respuesta decaerá a cero conforme $t \to \infty$ indicando la estabilidad del sistema.

Un par de polos complejos conjugados tendrán una respuesta en el tiempo

$$e^{-at}(c\cos\beta t + dsen\beta t) \equiv Ae^{-at}sen(\beta t + \gamma) \text{ donde } A = \sqrt{\left(c^2 + d^2\right)} \text{ y } \gamma = \tan^{-1}\left(c/d\right).$$

Nuevamente vemos que los polos en la mitad izquierda del plano s, tienen respuestas en el tiempo correspondientes que se desvanecen en el tiempo en forma de una sinusoidal exponencialmente amortiguada cuando $t \to \infty$, indicando la estabilidad del sistema.

C. Impedancia de un capacitor: Respuesta en frecuencia.

En un capacitor el voltaje entre sus placas es proporcional a la carga almacenada e inversamente proporcional a la capacidad. Podemos expresar a la carga como la integral de la corriente que entra al condensador a lo largo del tiempo y tenemos:

$$v(t) = \frac{q(t)}{C}; \quad v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt. \tag{9}$$

Aplicamos la transformada de Laplace según (1) y obtenemos:

$$V(s) = \frac{1}{Cs}I(s); \quad Zc(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}. \tag{10}$$

En el dominio de la transformada de Laplace la impedancia del capacitor es $1/Cs$, que es la oposición a su "avance", pues todo material tiene resistencia, capacitancia e inductancia (estas dos últimas Reactancia), que retrasan, dispersan y desfasan a la onda, respecto a la onda original.

Para ver como depende la impedancia del condensador con la frecuencia sustituimos s por jw en la ecuación (10) y tenemos la impedancia de alterna del capacitor:

$$Z(jw) = \frac{1}{Cjw} \tag{11}$$

III. PASOS PARA TRABAJAR CON LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE PARA ANALIZAR CIRCUITOS.

Como se mostro en las secciones anteriores, el análisis algebraico de un circuito para determinar su respuesta en frecuencia, se puede simplificar en gran medida utilizando la transformada de Laplace. Una vez obtenida la función de transferencia en el dominio s, se sustituye s por jw (lo que corresponde al régimen sinusoidal permanente) para determinar la función de transferencia para frecuencias físicas.

Entonces, para analizar un circuito RCL usando la transformada de Laplace hay dos métodos:

- Escribir las ecuaciones temporales, aplicar la transformada de Laplace, resolver en el dominio de Laplace y finalmente volver al dominio del tiempo usando la transformada inversa.

- Escribir el circuito equivalente en el dominio de Laplace y resolver directamente en él (con atención a las condiciones iniciales).

Si el objetivo es conocer la respuesta en frecuencia no es necesario volver al dominio temporal.

IV. CONCLUSIONES.

Aprender teoría de funciones de variable compleja, es de gran importancia para futuros ingenieros eléctricos y electrónicos. El uso de esas “herramientas”, nos permite modelar cuestiones complejas de la electricidad de forma más simple. La simplicidad de los cálculos es primordial a la hora de manipularlos, tanto para entender propiedades y comportamientos de sistemas eléctricos, como diseñar un nuevo sistema que cumpla una tarea específica.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. *2do. Cuatrimestre 2010,* pp.50-53, 56-59. 2010.

[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, pp.177-182, 202-205.

[3] P. E. Wellstead y M. A. Pérez Cisneros, "Análisis de Respuesta en Frecuencia", Reporte Técnico 10, [internet], disponible en http://www.control-systems-principles.co.uk/whitepapers/spanishwp/11 freqresponser 2SP.pdf [acceso el 16 de marzo de 2011].

[4] Anónimo, "Electrónica Analógica Respuesta en frecuencia. Transformada de Laplace", [internet], disponible en http://www.ele.uva.es/~jesus/eanalogica/transf_laplace.pdf [acceso el 16 de marzo de 2011].

[5] J. S. Cánovas Peña, "Transformada de Laplace y sus aplicaciones en las ecuaciones diferenciales", 8 enero de 2008[internet], disponible en http://filemon.upct.es/~jose/varcomp/ctrans.pdf [acceso el 8 de abril de 2011].