Transformaciones conformes aplicada al estudio del flujo de un ala en dos dimensiones

Silvestri David

Estudiante de Ingeniería en Electrónica,
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000 CPB Bahía Blanca, Argentina,
mail@gmail.com

Agosto 2013

Resumen: En este artículo se demostrará un mapeo rico en propiedades interesantes, el cual se utiliza en ingeniería aeronáutica para estudiar el flujo alrededor de un ala en dos dimensiones,ya que el mapeo a verse transforma círculos centrados en el origen en el plano z en meniscos(en forma de lente) en el plano w, y solamente se requiere una leve alteración antes de que estas imágenes tomen la forma de un ala.

I TRANSFORMACIONES CONFORMES

De la teoría de las funciones analíticas se sabe cómo se transforma una función en otra al modificarse, de acuerdo con ciertas normas, el contorno sobre el cual se asigna la condición que determina la función. Estas transformaciones se denominan conformes las cuales preservan ángulos para un mapeo $w = f(z)$,y permiten, una vez determinado el potencial complejo w para un contorno sencillo (p. ej. formado por tramos rectos o circulares), obtener el potencial complejo para otras configuraciones cuyos contornos se obtienen transformando el contorno simple original. Bajo tales mapeos, el ángulo entre dos curvas que se cortan en el plano z es el mismo que el ángulo entre las curvas correspondientes en el plano w. El sentido del ángulo también se preserva. Si $f(z)$ es analítica entonces $w = f(z)$ define un mapeo conforme excepto en los puntos donde la derivada $f'(z)$ es cero. Vamos a explicar ahora la idea fundamental. Sea $w = \phi + i\psi$ el potencial complejo de un flujo potencial bidimensional en el plano z. Supongamos ahora que elegimos una cierta función analítica de z,

$$Z = f(z) \tag{1}$$

Cuya Inversa es:

$$z = F(Z) \tag{2}$$

Es una función analítica de Z. Entonces

$$W(Z) = w(F(Z) \tag{3}$$

Es también una función analítica de Z. Definamos ahora a Z como:

$$Z = X + iY \tag{4}$$

Y separemos la parte real e imaginaria de W:

$$W(Z) = \phi(X, Y) + i\psi(X, Y) \tag{5}$$

Puesto que W es una funcion analitica de Z, ϕ y ψ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, y en consecuencia las dos funciones

$$U_x = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \tag{6}$$

$$U_y = \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial \psi}{\partial X} \tag{7}$$

Representan las componentes de la velocidad de un flujo potencial en el plano Z.

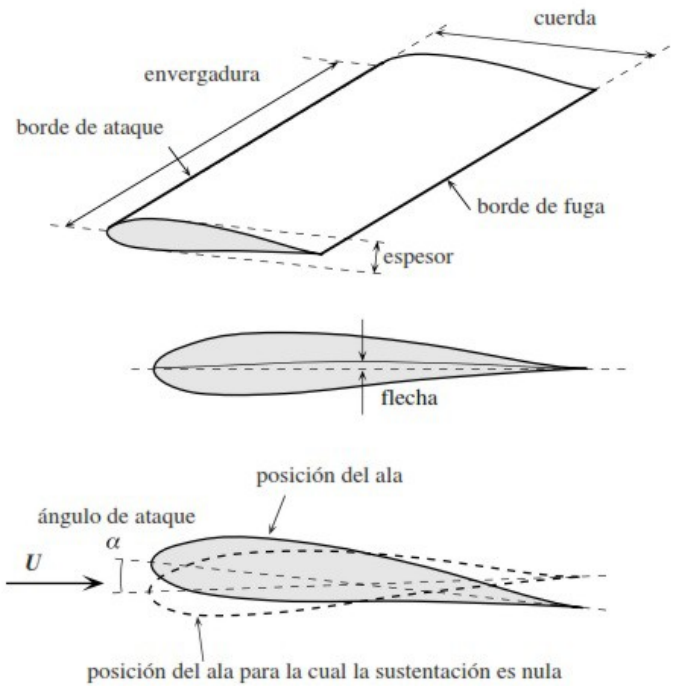

Figure 1: Terminología aeronáutica

A La teoría clásica de los perfiles alares

Gracias a las transformaciones conformes podemos obtener a partir de un flujo potencial conocido, las características de otro flujo potencial de interés, que se obtiene del primero aplicando una transformación elegida convenientemente. De esa forma se puede encontrar la solución del problema del flujo potencial alrededor de un perfil alar.

Transformación de Joukowsky

$$w = z + \frac{c^2}{z},\ c = cte. \tag{8}$$

Este mapeo permite permite transformar el círculo $z = ae^{i\theta}$ en una elipse cuyos ejes valen:

$$a + \frac{c^2}{a}, a - \frac{c^2}{a} \tag{9}$$

En el caso particular $c = a$, la (1) transforma el círculo en una placa plana de ancho 4a. Si aplicamos la transformación (1) a un círculo del plano z que pasa por $z = a$ pero que encierra a $z = -a$, por ejemplo, el círculo

$$z = (a + \lambda)e^{i\gamma} - \lambda, con|\lambda| < a \tag{10}$$

obtenemos un perfil alar con un borde de ataque redondeado y un borde de fuga filoso. El perfil es simétrico si el parámetro λ es real, y tiene comba si $Im(\lambda) \neq 0$

Muchos flujos de interés son esencialmente bidimensionales, es decir, una de las tres coordenadas espaciales es ignorable y la correspondiente componente de la velocidad es nula (o una constante). Los flujos planos y los flujos con simetría axial son ejemplos de esta clase de flujos. Consideremos los flujos planos. Es habitual elegir z como la coordenada ignorable, de modo que el flujo se desarrolla en el plano (x, y).

Sea α el ángulo que da la orientación del perfil alar, y por definición se mide a partir de la posición del ala para la cual la sustentación es nula.

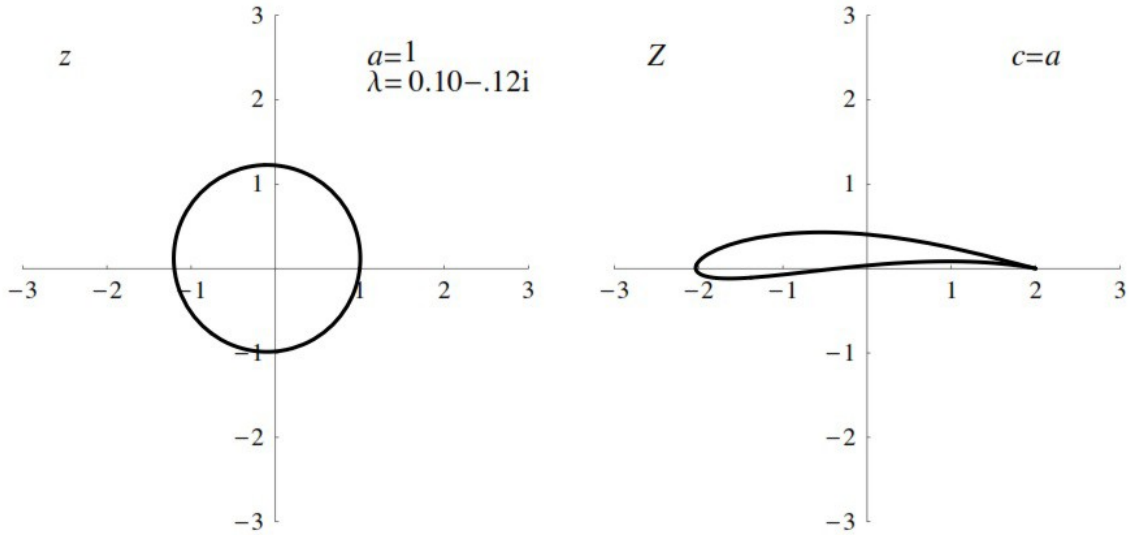

Figure 2: Perfil alar obtenido a partir del círculo unitario mediante la transformación de Joukowski

B Comentarios sobre flujos potenciales

En general, el flujo potencial alrededor de perfiles de este tipo tiene una singularidad en el borde de fuga y la velocidad tiende al infinito hacia el vértice. Sin embargo, la singularidad se puede eliminar si se elige adecuadamente el valor de la circulación alrededor del perfil. Para cada valor del ángulo de ataque α para el cual la velocidad permanece finita en el borde de fuga, se puede encontrar precisamente imponiendo esa condición. Este es uno de los pasos cruciales para el desarrollo de la aerodinámica, y da resultados que están en excelente acuerdo con la experiencia.

II CONCLUSIONES

Se mostró cómo un mapeo conforme se utiliza para facilitar un estudio en ingeniería aeronáutica. Se obtiene la solución del flujo potencial alrededor de un perfil alar.

REFERENCIAS

[1] Glyn James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería - 2da Edición -

[2] Julio Gratton, Introducción a la Mecánica de Fluidos, Capítulo 6- http://www.lfp.uba.ar/es/notas.php -Estructura de la Materia 1-