

Aplicación de la Transformada de Laplace en circuitos eléctricos

Silva Esteaaban

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
estebansilva_89@hotmail.com.ar
Agosto 2011

Resumen: En este informe se detallará una de las aplicaciones, en ingeniería de las transformaciones de Laplace. Se intentará explicar cómo realizar los cálculos matemáticos aplicados en circuitos eléctricos, el objetivo es: encontrar unas ecuaciones entre unas variables y unos parámetros que cumplan con un funcionamiento conocido y correspondan a cosas físicamente realizables.

Palabras clave: Ley de Ohm, Leyes de Kirchhoff, transformada de Laplace, corriente, resistencia.

I. INTRODUCCIÓN

Para ilustrar el uso de la transformada de Laplace, consideremos aquí sus aplicaciones al análisis de sistemas de circuitos eléctricos.

En estos problemas se consideran los circuitos ya hechos, de modo que los parámetros vienen a ser las propiedades de los elementos físicos que forman el circuito, es decir, el camino para la circulación de la carga eléctrica, y las variables serían la misma carga eléctrica, su flujo a través del circuito, y otras cantidades asociadas, que tienen que acomodarse al circuito ya construido.

Como las condiciones iniciales son tomadas automáticamente en cuenta en el proceso de transformación, la transformada de Laplace es especialmente atractiva para examinar el comportamiento de tales sistemas.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

Los circuitos eléctricos pasivos son construidos con tres elementos básicos: resistores (que tienen resistencia R , medida en ohms Ω), capacitores (que tienen capacitancia C , medida en farads F) e inductores (que tienen inductancia L , medida en henrys H), con las variables asociadas corriente $i(t)$ (medida en amperes A) y voltaje $v(t)$ (medido en volts V). El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga $q(t)$ (medida en coulombs C) mediante la relación

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Convencionalmente, los elementos básicos se representan simbólicamente como en la figura 1, figura 2 y figura 3.

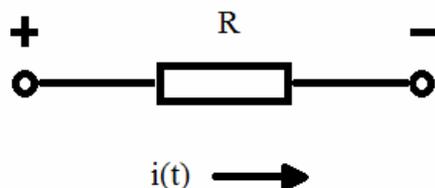
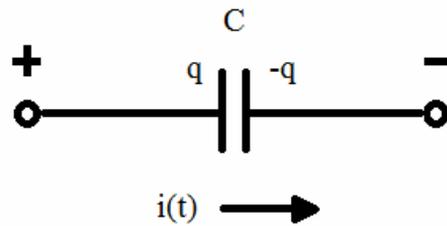


Figura 1. Resistor



2. Capacitor

Las relaciones entre el flujo de corriente $i(t)$ y la caída de voltaje $v(t)$ a través de estos elementos en el tiempo t son

Caída de voltaje a través de la resistencia = Ri (Ley de Ohm)

$$\text{Caída de voltaje a través del capacitor} \equiv \frac{1}{C} \int idt \equiv \frac{q}{C}$$

A. Ley de Ohm

Ley 1 La ley de Ohm postula que el voltaje a través de una resistencia es directamente proporcional a la corriente que pasa por la resistencia. La constante de proporcionalidad es el valor de la resistencia en ohmios ($1\Omega = 1V/A$).

$$v = Ri$$

donde $R \geq 0$.

B. Leyes de Kirchhoff

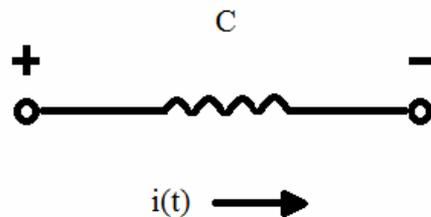
Las leyes de Kirchhoff son dos igualdades que se basan en la conservación de la energía y la carga en los circuitos eléctricos.

La interacción entre los elementos individuales que forman un circuito eléctrico está determinada por las leyes de Kirchhoff:

Ley 1 En cualquier nodo, la suma de la corriente que entra en ese nodo es igual a la suma de la corriente que sale. De igual forma, La suma algebraica de todas las corrientes que pasan por el nodo es igual a cero.

$$\sum_{k=1}^n I_k = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = 0$$

Ley 2 En toda malla la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada. De forma equivalente, En toda malla la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico es igual a cero.



3. Inductor

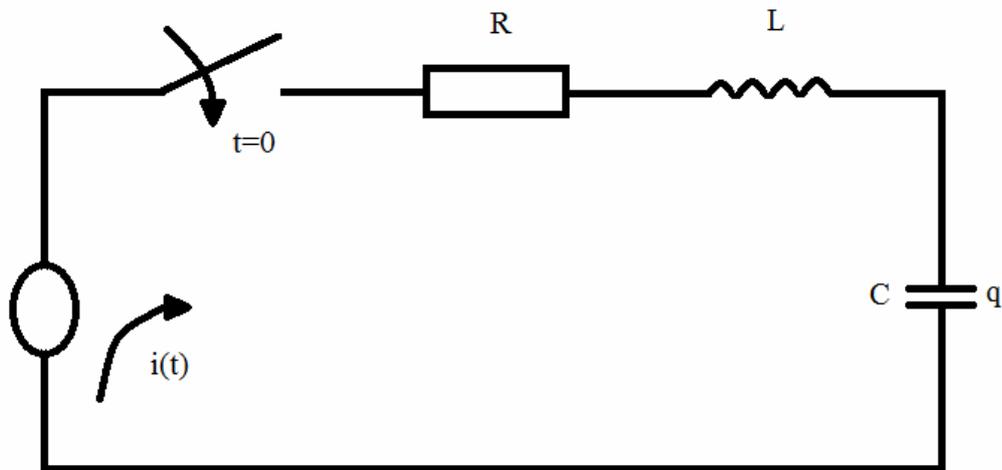


Figura 4 Circuito RLC

$$\sum_{k=1}^n V_k = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = 0$$

El uso de estas leyes nos lleva a las ecuaciones de circuito, las cuales pueden ser analizadas usando las técnicas de la transformación de Laplace.

C. Resolución de circuitos con ayuda de la transformada de Laplace.

El Procedimiento general

1. Representar el circuito en el dominio s.
2. Formular las ecuaciones que caracterizan el circuito después de efectuado el paso (1).
3. Resolver las ecuaciones de (2) para las variables de interés.
4. Transformar los resultados obtenidos en (3) en sus equivalentes en el dominio del tiempo (transformada inversa de Laplace).
5. Comprobar que los resultados obtenidos en (4) tienen significado físico mediante la aplicación de los teoremas de los valores inicial y final.

D. Ejemplo

El circuito RLC de la figura 4 está formado por un resistor R, un capacitor C y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje $e(t)$. Antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t=0$, tanto la carga en el capacitor como en la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor y la corriente resultante $i(t)$ en el circuito en el tiempo t sabiendo que $R=160 \Omega$, $L=1 \text{ H}$, $C=10^{-4} \text{ F}$ y $e(t)=20 \text{ V}$.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito de la figura 4 se obtiene

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t)$$

Observe que para determinar la corriente sólo debe aplicarse la transformada de Laplace en la fórmula. Sustituyendo los valores para L, R, C y e(t) y usando la fórmula llegamos a

$$160I(s) + sI(s) + \frac{10^4}{s} I(s) = \frac{20}{s}$$

Esto es,

$$I(s) = \frac{20}{(s^2 + 80)^2 + 60^2}$$

La cual, aplicando la transformada inversa, da como antes

$$i(t) = \frac{1}{3} e^{-80t} (\text{sen}(60t))$$

REFERENCIAS

- [1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.
- [2] UNIVERSIDAD DE VIGO, [internet], disponible en <http://www.webs.uvigo.es/enrique.sanchez/PDFs/transpac-2.pdf>, [acceso el 13 de agosto de 2011].
- [3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kirchhoff, [acceso el 14 de julio