Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de circuitos eléctricos

Sebastián I. Borges

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
borgesseba@gmail.com
Julio 2013

Resumen: En el presente trabajo se presentará una breve introducción teórica sobre la transformada de Laplace a fin de facilitar el entendimiento del mismo, y luego se mostrará y explicará de que manera se utiliza este concepto en la resolución de ecuaciones diferenciales, particularmente para circuitos eléctricos.

Palabras clave: Transformada de Laplace, Ecuaciones diferenciales, Circuitos eléctricos, RLC.

I. INTRODUCCION

Previo al desarrollo de la presente nota de aplicación debe presentarse el marco teórico sobre el cual el autor se basa para realizarla.

La transformada de Laplace recibe su nombre en honor del matemático francés Pierre-Simon Laplace, que la presentó dentro de su teoría de la probabilidad en 1785. La moderna aplicación de las transformadas de Laplace y toda su teoría subyacente surge en realidad en la segunda mitad del siglo XIX. Al tratar de resolver ecuaciones diferenciales relacionadas con la teoría de vibraciones, el ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925) descubrió que los operadores diferenciales podían tratarse analíticamente como variables algebraicas. Hacia principios del siglo XX, la transformada de Laplace se convirtió en una herramienta común de la teoría de vibraciones y de la teoría de circuitos, dos de los campos donde ha sido aplicada con más éxito. En general, la transformada es adecuada para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales en el origen. Una de sus ventajas más significativas radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división. Esto transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, mucho más fáciles de resolver.

La transformada de Laplace de una función *f(t)* definida para todo $t \geq o$ es la función *F(s)* que se define como

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Donde *s* puede ser real o complejo. La función original *f(t)* será la transformada inversa de *F(s)*. En este punto se opta por no ahondar en definiciones y propiedades que son irrelevantes para la aplicación que aquí se intenta presentar. Solo se presentarán las propiedades de derivadas e integrales que se utilizará en esta aplicación y que se tratan de lo siguiente:

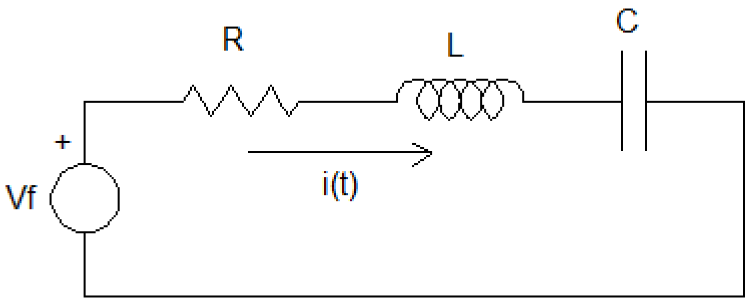
$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

$$\int_0^t f(t)dt \longleftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

Teniendo en cuenta estos conceptos puede procederse al desarrollo de la presente nota de aplicación.

II. DESARROLLO

La resolución de circuitos eléctricos es una práctica muy común en las ingenierías eléctrica y electrónica, para esto existen diversos métodos y técnicas que se basan en diferentes principios matemáticos. Aquí se intentará detallar la resolución de circuitos RLC (integrados por resistores, inductores y capacitores) resolviendo las ecuaciones diferenciales que describen el modelo, utilizando la transformada de Laplace.



Por lo general en este tipo de circuito eléctrico interesa, a partir de los datos de tensión, resistencia, capacitancia e inductancia, conocer la corriente que circulará por el mismo. Para esto se plantea la ecuación de voltajes de Kirchhoff que dice que en un lazo cerrado la suma de todas las caídas de tensión es igual a cero. Conociendo como es la caída de potencial en cada uno de los elementos del circuito se llega a la siguiente ecuación integral-diferencial:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = Vf(t)$$

Luego aplicando las propiedades de derivadas e integrales de la transformada de Laplace se trasforma toda la ecuación en función de *i(t)* para llegar a la ecuación de *I(s)*. Teniendo como condiciones iniciales que *Vf(t)=Vf (constante)* y que en *t=0, i(0)=0,* $v_c=0$ se arriba a la siguiente ecuación:

$$I(s)\left(R + L.s + \frac{1}{C.s}\right) = \frac{Vf}{s}$$

Que finalmente se antitransformará para obtener la ecuación de *i(t).*

De esta manera se puede resolver la ecuación integral-diferencial sin necesidad de resolver puntualmente una integral o una derivada sino que se la resuelve mediante simples manejos algebraicos.

A continuación un ejemplo de esta aplicación para un circuito RLC con $R=100\Omega$, $L=1H$, $C=100\mu F$, $Vf=24v$, $v_c(0)=0v$, $i(0)=0$.

Luego de plantear la ecuación diferencial que se presentó anteriormente se aplica la transformada de Laplace para obtener

$$I(s)\left(100\Omega + 1H.s + \frac{10000F}{s}\right) = \frac{24v}{s}$$

$$I(s) = \frac{24}{(100s + s^2 + 10000)}$$

$$I(s) = \frac{24}{(s+50)^2 + \left(\sqrt{7500}\right)^2}$$

Finalmente se antitransforma la ecuación de *I(s)* para obtener *i(t)*.

$$I(s) = \frac{24}{(s+50)^2 + \left(\sqrt{7500}\right)^2} \rightarrow i(t) = 24 \cdot e^{-50t} \cdot \frac{sen(\sqrt{7500}t)}{\sqrt{7500}}$$

$$i(t) = 0.27712 \cdot e^{-50t} \cdot sen(\sqrt{7500}t)$$

Para llegar a este resultado solo se utilizó la propiedad de desplazamiento en frecuencia y la transformada de *sen (at)/a.*

III. CONCLUSION

Como conclusión puede afirmarse que la transformada de Laplace ofrece un método simple y sencillo para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Este método facilita de manera significativa el cálculo de corriente en circuitos eléctricos lo que explica su difundido uso en este tipo de cálculos.

REFERENCIAS

[1] G. James, “Matemáticas Avanzadas para Ingeniería”, Prentice Hall, Segunda edición.

[2] Dr. G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”, 2do. Cuatrimestre 2012

[3] “Wikipedia, la enciclopedia libre” [internet], disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace

[4] “Wikipedia, la enciclopedia libre” [internet], disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Circuito_RLC

[5] “Aplicación de la transformada de Laplace a los circuitos eléctricos”, Universidad Nacional de Colombia [internet], disponible en: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ingenieria/2001603/lecciones/cap10/cap10lec6/cap10lec6.htm