Resolución de Circuitos RLC utilizando la Transformada de Laplace

Sebastián J. Herrera

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur,Avda. Alem 1253,B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Sebash1992@gmail.com
Julio 2012

Resumen: En el informe desarrollado a continuación se considerará la Trasformada de Laplace como un método de resolución de circuitos RLC de una o mas mallas. En este informe daremos a conocer la parte teórica y reforzaremos los conceptos con algún ejemplo.

Palabras clave: Laplace, circuitos.

I. INTRODUCCIÓN

La Transformada de Laplace es de gran utilidad para la resolución de ecuaciones diferenciales, ya que nos permiten convertir la integración y la derivación en multiplicaciones y divisiones. De esta manera transforma las ecuaciones diferenciales y las integrales en ecuaciones polinómicas, que son mucho mas fácil de resolver que

La transformada de Laplace de una función f(t) definida para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función F(s)definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad (1)$$

En otras palabras podemos decir que toma una función f(t) de una variable t (real) en una función F(s) de otra variable s (compleja). Realizar la integral para calcular la Transformada de Laplace es solo para hacerlo por definición, en la actualidad existen tablas que nos permiten calcular la transformada sin necesidad de desarrollar la integral.

II. CIRCUITOS RLC

Un circuito RLC es un circuito lineal que contiene resistencias, bobinas y condensadores, los cuales pueden estar en serie o en paralelo, que se alimentan por una fuente de tensión alterna.

A. Capacitor o condensador

El condensador es un dispositivo capaz de almacenar energía en forma de campo eléctrico. Ofrece una resistencia al paso de la corriente, lo que se conoce como reactancia capacitiva. Cuando el condensador esta descargado suele comportarse como un cortocircuito; mientras que cuando esta cargado totalmente se suele comportar como una resistencia infinita; y durante el periodo de carga se comporta como una resistencia media.

La tensión que recibe un capacitor esta dada por:

$$v(t) = \frac{q}{c} = \frac{1}{c} . \int_0^t i(t)dt \quad (2)$$

La corriente de un condensador se puede ver como:

$$i(t) c \frac{dv(t)}{dt} \quad (3)$$

B. Bobina o inductor

A diferencia del condensador, la bobina por su forma almacena energía en forma de campo magnético. El inductor tiende a oponerse a los cambios bruscos de la corriente que circula sobre ellos, es decir que siempre tiende a quedarse en el estado en el que se encontraba.Una bobina inducirá en sus una tensión que se opondrá a la tensión que se le aplique desde la fuente (Esto ocurre en los instantes iniciales). Ello provoca que no pueda circular corriente de forma fluida. La tensión que pasa por una bobina puede expresarse como:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{4}$$

La corriente esta dada por:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t) \tag{5}$$

C. Resistencia:

Una resistencia o resistor es un elemento que causa oposición al paso de la corriente, causando que en sus terminales aparezca una diferencia de tensión. En corriente alterna esta resistencia la llamamos impedancia que solo tiene valores reales. También podemos decir que a bajas frecuencias se observa que una resistencia real se comportará de forma muy similar a como lo haría en corriente continua, siendo despreciables las diferencias. En altas frecuencias el comportamiento es diferente, aumentando en la medida en la que aumenta la frecuencia aplicada, lo que se explica fundamentalmente por los efectos inductivos que producen los materiales que conforman la resistencia real. La tensión que una resistencia se puede representar de la siguiente forma:

$$v(t) = R.i(t) \tag{6}$$

Por otra parte la corriente que atraviesa una resistencia puede verse como :

$$i(t) = R.v(t) \tag{7}$$

III. RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS RLC

Para resolver cualquier tipo de circuito se deben tener en cuenta las leyes de Kirchhoff, las cuales son igualdades que se basan en la conservación de la energía y la carga en los circuitos electrónicos.

A. Primera ley de Kirchhoff o regla de los nudos:

La suma algebraica de las intensidades en un nudo es cero

$$\sum I = 0 \tag{8}$$

O también se puede decir que la suma de las corrientes que entran a un nudo es igual a la suma de las corrientes que salen de dicho nudo.

$$I_1+I_2+I_3=I_4+I_5 \tag{9}$$

B. Segunda ley de Kirchhoff o regla de las mallas:

La suma algebraica de las fuerzas electromotrices aplicadas a una malla es igual a la suma de las caídas de tensión en dicha malla.

$$\sum E = \sum I.R \tag{10}$$

C. Solución de circuitos de corriente alterna en distribución en serie:

En la figura uno podemos ver el esquema de un circuito RLC que posee una bobina (10mH), un condensador (100 mf), una resistencia (2Ω) y una fuente alterna (1kHz). Para hallar el valor de su corriente empezaremos planteando la ecuación del sistema.

$$E(t) - Ri(t) - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt = 0 \tag{11}$$

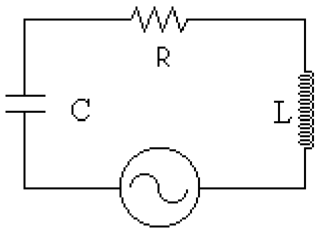

Figura 1: Circuito RLC con distribución en serie

Ahora sustituimos las variables R ,C y L por sus respectivos valores.

R=2ohm
L=0.1H
C=0.1F
E(t)=120t-120t h(t-1)

$$120t - 1020t\ h(t-1) = 2i(t) + 0.1\frac{di(t)}{dt} + 10\int_0^t i(t)dt \tag{12}$$

Aplicamos Laplace a toda la ecuación y obtenemos:

$$120\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s}\right) = 2(I(s) + 0.1sI(s) + 10\frac{I(s)}{s}) \tag{13}$$

Multiplicamos 10s toda la ecuación para simplificar y despejamos I(s)

$$I(s) = \frac{1200(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} - e^{-s})}{(s+10)^2} \tag{14}$$

$$I(s) = 1200(\frac{\frac{1}{100}}{s} - \frac{\frac{1}{100}}{s+10} - \frac{\frac{1}{100}}{(s+10)^2} - \frac{\frac{1}{100}}{s}e^{-s} - \frac{\frac{1}{100}}{s+10}e^{-s} - \frac{\frac{9}{100}}{(s+10)^2}e^{-s} \tag{15}$$

Por ultimo aplicamos la Transformada de Laplace inversa a la ecuación (15) y obtenemos el valor de la corriente en el sistema

$$i(t) = 12 - 12e^{-10t} - 120te^{-10t} - 12h(t-1) - 12h(t-1)e^{-10(t-1)} - 180(t-1)e^{-10(t-1)}\text{h(t-1)} \tag{16}$$

D. Solución de circuitos de corriente alterna en distribución en Paralelo:

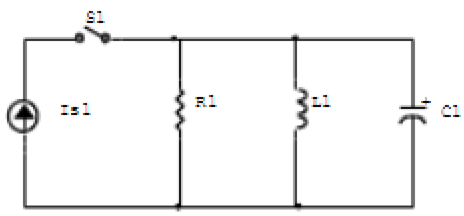

Figura 2: Circuito RLC con distribución en paralelo

En la figura 2 podemos ver el esquema de un circuito en paralelo al cual intentaremos calcularle su voltaje utilizando la Transformada de Laplace.

Para resolver dicho circuito primero debemos plantear las ecuaciones que nos brinda el circuito, para ello utilizamos las leyes de Kirchhoff:

$$Is1 = Ir + Ic + Il \tag{17}$$

$$\frac{Vr}{R} + \frac{1}{L}(i(0)\int_0^t Vl\ \ dt) + C.\frac{dVc}{dt} = Is1 \tag{18}$$

Ahora a esa función le remplazamos las variables por los valores correspondientes

I_{s1}=8 cos(2t+6)

R=2Ω

L=3H

C=0.7F

$$\frac{Vr}{2}+\frac{1}{3}\left(i(0)+\int_0^t Vldt\right)+0.7\ \frac{dVc}{dt}=8\cos\left(2t+6\right) \tag{19}$$

Podemos ver que aparece un i(0) en la formula, eso es debido a que nosotros cuando apliquemos Laplace, estamos considerando solo los valores de t positivos, por lo que la integra que representa la corriente de la bobina se define para los tiempos menores y mayores al t=0, por lo cual debemos remplazar el valor de la corriente del inductor para los t negativos i(0)=3 A

$$0.5Vr+1+0.333\int_0^t v\,dt+0.7\ \frac{dVc}{dt}=8Cos(2t+6) \tag{20}$$

Teniendo en cuenta que es un circuito en paralelo podemos afirmar que:

$$V_r=V_l=V_c=V \tag{21}$$

Entonces utilizando la ecuación (21) podemos decir:

$$0.5v+1+0.333\int_0^t v\,dt\ +0.7\ \frac{dv}{dt}=8Cos\ (2t+6) \tag{22}$$

Para averiguar el voltaje ahora solo debemos aplicar Laplace a ambos lados de la ecuación (22) y luego despejamos V utilizando las propiedades necesarias:

$$L\{0.5v\}+L\{1\}+L\left\{0.333\int_0^t v\,dt\right\}+L\left\{0.7\frac{dv}{dt}\right\}=L\{8\cos\left(2t+6\right)\} \tag{23}$$

$$0.5V(s)+\frac{1}{s}+0.333\frac{V(s)}{s}+0.7sV(s)-0.7*v(0)=8\left(\frac{0.9602\ s+0.5588}{(s^2+4)}\right) \tag{24}$$

$$0.5V(s)+\frac{1}{s}+0.333\frac{V(s)}{s}+0.7sV(s)-0.7*1=\left(\frac{7.6816\ s+4.4704}{(s^2+4)}\right) \tag{25}$$

Ahora despejamos V(s):

$$\left\{0.5+\frac{0.333}{s}+0.7s\right\}*V(s)=\frac{7.6816\ s+4.4704}{s^2+4}-\frac{1}{s}+0.7 \tag{26}$$

Trabajando un poco con la ecuación (26) llegamos a que:

$$V(s)=\frac{6.66816\ s^2+7.2704\ s-4+0.7\ s^3}{(s^2+4)(0.5s+0.333+0.7\ s^2)} \tag{27}$$

Una vez llegado a esto anti trasformamos la ecuación (27) para pasar del dominio de la frecuencia compleja s al dominio del tiempo t

$$v(t)=0.6120\cos(2t)+5.9801(2t)+0.3880\ e^{-0.35t}\cos(5.9042t)-5.0656e^{-0.35t}\ sen(5.9042t)$$

IV. Conclusión

En este pequeño informe podemos ver la gran utilidad que tienen las transformadas de Laplace para la solución de circuitos electrónicos, tanto en distribución en serie como en distribución en paralelo. Esta técnica de desarrollo ayuda en gran medida debido a que podemos evitar realizar integrales y derivadas que pueden llegar a resultar un poco tediosas.

REFERENCIAS.

[1] Wikipedia, La enciclopedia libre, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 28 de Junio de 2012]

[2] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 2do. Cuatrimestre 2012,pp 57-59

[3] Scribd,[internet], disponible en http://es.scribd.com[acceso el 7 de Julio de 2012]

[4]WikiMatemática, [internet], disponible en http://www.wikimatematica.org[acceso el 8 de Julio de 2012]