Transformada de Laplace: Intercambiador de calor

Schmeigel Nicolas

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
nicoschmeigel@gmail.com
Marzo 2014

Resumen: el objetivo de este trabajo es utilizar el método de transformada de Laplace en un modelado matemático de un sistema real. Para esto, es necesario considerar modelos dinámicos, es decir, variables respecto al tiempo. Esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferenciales respecto al tiempo para representar matemáticamente el comportamiento de tal sistema. Evaluaremos un modelo que representa un intercambiador de calor mediante el uso de la función transferencia que representa dicho modelo.

Palabras clave: Transformada de Laplace, control de proceso, intercambiador de calor, función transferencia.

I. INTRODUCCIÓN

I.1. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace es una técnica matemática la cual está definida por medio de una integral impropia y cambia una función en una variable de entrada en otra función en otra variable. Ésta, puede ser usada para resolver ecuaciones diferenciales lineales y ecuaciones integrales, en general se aplica a problemas con coeficientes constantes. Un requisito adicional es el conocimiento de las condiciones iniciales de la función.

Se define a dicha transformada mediante la siguiente expresión:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Aquí, la letra *s* representa una nueva variable, que para el proceso de integración se considera constante, así convierte una función de *t*, la cual usualmente representa el tiempo, en una función de una nueva variable, la variable *s*. Las condiciones para la existencia de la transformada de una función son que ella sea: de orden exponencial y continua a tramos.

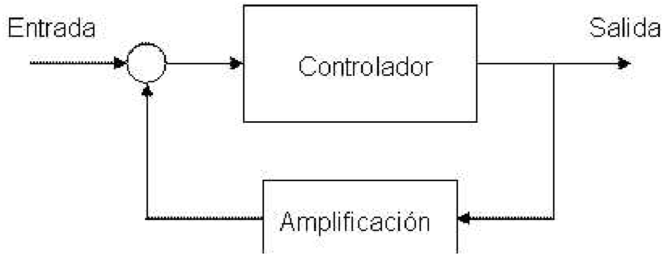
La operación que acaba de describirse, mediante la cual se obtiene F(s) a partir de f(t) dada se define como transformada de Laplace. A su vez f(s) es la transformada inversa de Laplace y se denota como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$$

I.2. SISTEMA DE CONTROL

Los sistemas de control son aquellos dedicados a obtener la salida deseada de un sistema o proceso. En un sistema general se tienen una serie de entradas que provienen del sistema a controlar, llamado planta, y se diseña un sistema para que, a partir de estas entradas, modifique ciertos parámetros en el sistema planta, con lo que las señales anteriores volverán a su estado normal ante cualquier variación.

Un sistema de control básico es mostrado en la siguiente figura:



Hay varias clasificaciones dentro de los sistemas de control. Atendiendo a su naturaleza son analógicos, digitales o mixtos; atendiendo a su estructura (número de entradas y salidas) puede ser control clásico o control moderno; atendiendo a su diseño pueden ser por lógica difusa, redes neuronales. La clasificación principal de un sistema de control es de dos grandes grupos, los cuáles son:

- *Sistema de lazo abierto*: Sistema de control en el que la salida no tiene efecto sobre la acción de control. Se caracteriza porque la información o la variable que controla el proceso circulan en una sola dirección desde el sistema de control al proceso.

El sistema de control no recibe la confirmación de que las acciones se han realizado correctamente.

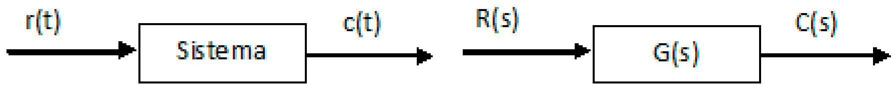
- *Sistema de lazo cerrado*: Sistema de control en el que la salida ejerce un efecto directo sobre la acción de control.

  Se caracteriza porque existe una relación de realimentación desde el proceso hacia el sistema de control a través de los sensores.

  El sistema de control recibe la confirmación si las acciones ordenadas han sido realizadas correctamente.

I.3. FUNCION TRASNFERENCIA

Se define función de transferencia G(s) de un sistema como el cociente entre la transformada de Laplace de la señal de salida y la transformada de Laplace de señal de entrada, suponiendo las condiciones iniciales nulas.



Matemáticamente se representará:

$$G(s) = \frac{Lc(t)}{Lr(t)} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Características de la función de transferencia:

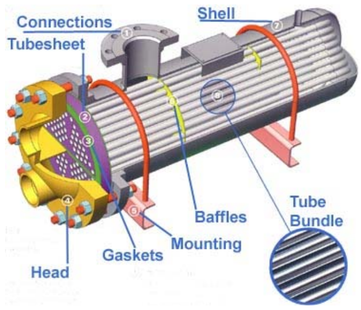
- La función de transferencia es una propiedad del sistema y depende de las propiedades físicas de los componentes del sistema, es por tanto independiente de las entradas aplicadas.
- La función de transferencia viene dada como el cociente de dos polinomios en la variable compleja s de Laplace, uno, N(s) (numerador) y otro D(s) (denominador).
- El grado del denominador de la función de transferencia es el orden del sistema.
- El polinomio del denominador, D(s), se llama ecuación característica del sistema.
- Distintos sistemas pueden compartir la misma función de transferencia, por lo que ésta no proporciona información a cerca de la estructura interna del mismo.
- Conocida la función de transferencia de un sistema se puede estudiar la salida del mismo para distintos tipos de entradas. La función de transferencia es muy útil para, una vez calculada la transformada de Laplace de la entrada, conocer de forma inmediata la transformada de Laplace de la salida. Calculando la trasformada inversa se obtiene la respuesta en el tiempo del sistema ante esa entrada determinada.
- El polinomio del denominador de la función de transferencia, D(s), se llama función característica, ya que determina, por medio de los valores de sus coeficientes, las características físicas de los elementos que componen el sistema.
- La función característica igualada a cero se conoce como ecuación característica del sistema:

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \ \ldots a_1 \cdot s + a_0 = 0$$

Las raíces de la ecuación característica se denominan polos del sistema. Las raíces del numerador N(s) reciben el nombre de ceros del sistema.

II. LAPLACE EN UN SISTEMA DE CONTROL: INTERCAMBIADOR DE CALOR

Los intercambiadores de calor de carcasa y tubos están compuestos por tubos cilíndricos, montados dentro de una carcasa también cilíndrica, con el eje de los tubos paralelos al eje de la carcasa. Un fluido circula por dentro de los tubos, y el otro por el exterior (fluido del lado de la carcasa). Son el tipo de intercambiadores de calor más usado en la industria.



La ecuación diferencial que representa matemáticamente al intercambiador es:

$$U_{d0}A_{TC0}\left(t_v-\frac{t_e}{2}-\frac{t_s}{2}\right)+wCpt_e-wCpt_s=\frac{1}{2}mCp\frac{d}{dt}t_s$$

Ud0: Coeficiente global de transferencia de calor referido al diámetro exterior
(BTU/h °F ft2)
ATC0: Área de transferencia de calor referida al diámetro exterior (ft2)
Cp : Capacidad calorífica (BTU/lb °F)
tv : Temperatura del vapor (°F)
te : Temperatura del agua a la entrada (°F)
ts : Temperatura del agua a la salida (°F)
(te+ ts) / 2 :Temperatura del agua dentro de tubos (°F)
tref : Temperatura de referencia (°F)
w : Flujo de agua (lb/h)
m : Cantidad de agua dentro de tubos (lb)
$\overline{tv},\overline{ts},\overline{tw}$: Valores en condiciones estables
Tv , Ts , W Variables de desviación

Linealizando:

$$wCp\cdot t_s=\overline{w}Cp\overline{t_s}+Cp\overline{t_s}(w-\overline{w})+\overline{w}Cp(t_s-\overline{t_s})=wCp\overline{t_s}+\overline{w}Cp(t_s-\overline{t_s})$$

$$U_{d0}A_{TC0}\left(t_v-\frac{t_e}{2}-\frac{t_s}{2}\right)+wCpt_e-\left[wCp\overline{t_s}+\overline{w}Cp(t_s-\overline{t_s})\right]=\frac{1}{2}mCp\frac{d}{dt}t_s$$

Evaluando las condiciones iniciales estables:

$$U_{d0}A_{TC0}\left(\overline{t_v}-\frac{t_e}{2}-\frac{\overline{t_s}}{2}\right)+\overline{w}Cpt_e-\overline{w}Cp\overline{t_s}=0$$

Restando las anteriores:

$$U_{d0}A_{TC0}(t_v-\overline{t_v})-\frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0}(t_s-\overline{t_s})+(w-\overline{w})Cpt_e-(w-\overline{w})Cp\overline{t_s}-\overline{w}Cp(t_s-\overline{t_s})=\frac{1}{2}mCp\frac{d}{dt}t_s$$

Utilizando variables de desviación:

$$U_{d0}A_{TC0}T_v - \frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0}T_s + Cpt_eW - Cp\overline{t_s}W - \overline{w}CpT_s = \frac{1}{2}mCp\frac{dT_s}{dt}$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$U_{d0}A_{TC0}T_v(s) - \left(\frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp\right)T_s(s) + \left(Cpt_e - Cp\overline{t_s}\right)W(s) = \frac{1}{2}mCpsT(s)$$

Datos físicos constantes del intercambiador:

- Largo del intercambiador = 9 ft
- Diámetro de coraza = 17 ¼’’
- Flujo = 224 gal/min
- Temperatura de entrada =80°F
- Temperatura de salida = 185°F
- Presión de vapor =150psia.
- Número de tubos= 112
- Diámetro exterior de tubo = ¾ ’’ de diámetro y BWG 16, disposición cuadrada a 90°, con un claro entre tubos de 0.63’’.
- Conductividad térmica de los tubos = 26 BTU/hft°F,
- Factor de obstrucción interno = 0.0012 hft2°F/BTU; externo = 0.001 hft2°F/BTU
- Coeficiente global de transferencia de calor = 650 BTU/hft2°F

Ahora con estos datos del intercambiador podemos calcular las constantes:

w = 224 gal/min = 112162.3 lb/h; Cp= 1 BTU/lb °F

$$U_{d0} = \left[\frac{1}{U_0} + \sum R\right]^{-1} = \left[\frac{1}{650} + 0.001 + 0.0012\right]^{-1} = 267.4897 \text{ BTU/h °F ft}^2$$

$$A_{TC0} = 112\ \pi D_0 L = 112\pi\left[\frac{3}{4(12)}\text{ft}\right][9\text{ ft}] = 197.92034 \text{ ft}^2$$

$$m = 112\frac{\pi}{4}\text{Di}^2 L\rho = 112\frac{\pi}{4}\left(\frac{0.62}{12}\text{ft}^2\right)(9\text{ ft})(62.428\text{ lb/ft}^3) = 131.932175\text{ lb}$$

t_e = 80 °F

$$K_1 = \frac{U_{d0}A_{TC0}}{0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp} = 0.381883131$$

$$K_2 = \frac{Cp\left(t_e - \overline{t_s}\right)}{0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp} = -7.573947 * 10^{-4}\ \frac{°\text{F}}{\text{lb/h}}$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{0.5mCp}{0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp} = 4.758320707 * 10^{-4}\text{ h} = 0.02855\text{ min}$$

=1.712995 seg

Despajemos T(s) y remplazamos los valores constantes antes calculados. De esta manera obtenemos la siguiente Función Transferencia:

$$T_S(s) = \frac{0.381883131}{(1.712995\cdot\text{seg})s + 1}Tv(s) + \frac{-7.573947 * 10^{-4}\ \frac{°\text{F}}{\text{lb/h}}}{(1.712995\cdot\text{seg})s\ +\ 1}W(s)$$

III. Conclusión

En este informe se pretende mostrar un uso práctico de la transformada de Laplace. Es una herramienta que brinda la facilidad que es resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas, simplificando enormemente obtener una solución al sistema, ya que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división.

Referencias

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, pp 97-200, 2002.

[2] Calandrini, Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable

Compleja. pp 48-53, 2013
[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki /Transformada_de_Laplace, [acceso el 5 de marzo de 2014].
[4] Aplicaciones reales de la transformada de Laplace, Ing. Elvira Niño,