# Transformada de Laplace: aplicación para resolver ecuaciones diferenciales

Alan J. J. Scheffer

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación*
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*alan.scheffer.92@gmail.com*
Agosto 2013

*Resumen*: En esta nota de aplicación se centrará en la transformada de Laplace y como esta operación puede usarse para facilitar la resolución de problemas, cuyo planteo se realiza a través de ecuaciones diferenciales. Como ejemplo se expondrá un problema de mecánica clásica descrito por un movimiento armónico.

*Palabras clave*: Laplace, ecuaciones diferenciales, física.

## I. INTRODUCCIÓN

Cuando se intenta analizar problemas de la vida real, muchos de ellos, debido a sus características se plantean a través de ecuaciones diferenciales. No obstante, tratar de obtener una solución a ese planteo puede dificultarse mucho. Es en esta ocasión donde herramientas, como la transformada de Laplace, entran en juego para facilitar los cálculos. La misma se encarga de cambiar el dominio del problema y convertir el sistema diferencial en ecuaciones algebraicas, las cuales son mucho mas sencillas de operar. Una vez realizado esto, se procede a anti-transformar el resultado obtenido, para obtener la solución del problema.

## II. ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación diferencial, es una ecuación en la cual las incógnitas son funciones y sus derivadas. Así $x(t) + x'(t) = k$ nos dice que la solución es una función, tal que al sumarle su derivada obtenemos el valor constante k.

Este tipo de ecuaciones son muy comunes en muchas ramas de la ciencia, como la física y la matemática.

### *A. Clasificación*

**Por tipo:** Si una ecuación tiene solo derivadas ordinarias de una o mas variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria. En cambio, una ecuación con derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se denomina ecuación diferencial parcial.

**Según el orden:** El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada mayor en la ecuación.

**Linealidad:** Una ecuación diferencial se dice lineal si la variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado, y los coeficientes de la ecuación solo dependen de esa variable dependiente.

## III. TRANSFORMADA DE LAPLACE

### *A. Definición*

La transformada de la Laplace de un función f(t) se define como:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Donde f(t) es una función real definida para $t \geq 0$.

*B. Propiedades*

Las siguientes propiedades son muy importantes, ya que serán usadas para la resolución de las ecuaciones diferenciales.

Linealidad:

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)\} = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} = \alpha F(s) \quad (1)$$

Transformada de derivadas:

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \quad (2)$$

Para otras propiedades de Laplace, véase [1].

## IV. Aplicación: Resolviendo un problema físico.

Los sistemas mecánicos pueden ser usados para modelar muchas situaciones e involucran tres elementos básicos: masa representada por M, resortes, cuya rigidez se representa mediante K y amortiguadores, cuyo coeficiente de amortiguamiento es B. Las variables asociadas son el desplazamiento x(t), medido en metros, y la fuerza F(t) medida en Newtons.

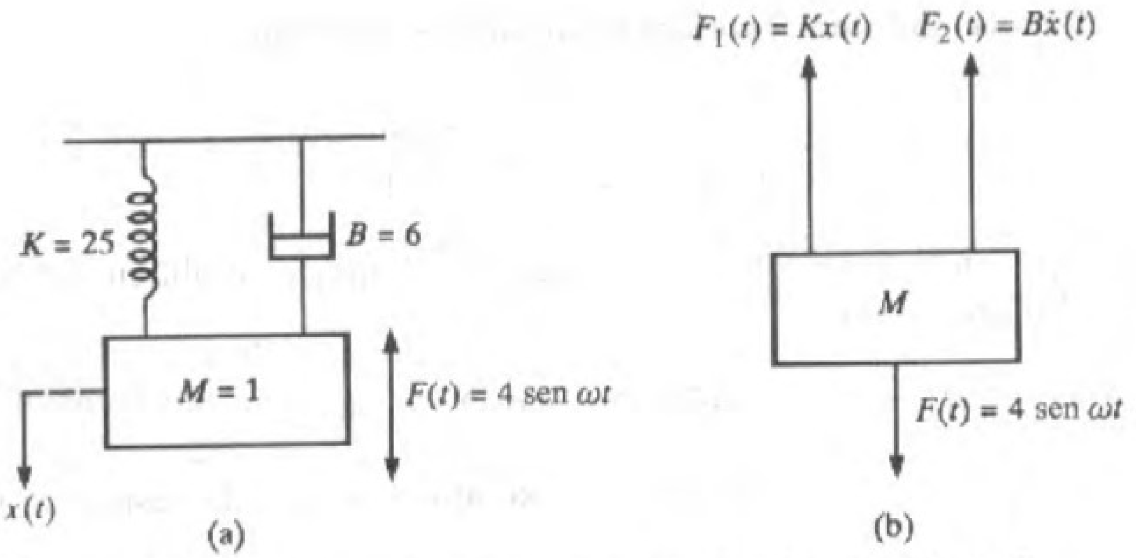


Figura 1: Sistema masa-resorte-amortiguador. (a)Esquema del problema (b)Diagrama de cuerpo libre.

Planteando las ecuaciones de Newton teniendo en cuenta la Figura 1-b obtenemos que:

$$M\ddot{x}(t) = F(t) - Kx(t) - B\dot{x}(t) \quad (3)$$

Despejando F(t) la ecuación queda:

$$M\ddot{x} + Kx(t) + B\dot{x}(t) = 4\,sen(\omega t) \quad (4)$$

Aplicando la transformada de Laplace, haciendo uso de las propiedades (1) y (2), se obtiene:

$$M\left(s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)\right) + KX(s) + B\left(sX(s) - x(0)\right) = \frac{4\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

Despejando X(s), obtenemos que:

$$X(s)\left(M\,s^2 + Bs + K\right) = \left(Ms + B\right)x(0) + M\,\dot{x}(0) + \frac{4\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (6)$$

Para simplificar un poco la resolución, supongamos un caso especifico, en el cual la posición y la velocidad en t = 0 es 0, entonces:

$$X(s) = \frac{4\omega}{\left(s^2 + \omega^2\right)\left(M\,s^2 + Bs + K\right)} \quad (7)$$

Remplazando los valores como indica la figura 1-a y suponiendo que la frecuencia en la fuerza externa aplicada es $\omega = 2$:

$$X(s) = \frac{8}{\left(s^2 + 4\right)\left(s^2 + 6s + 25\right)} \quad (8)$$

Antes de anti-transformar, debemos separar la anterior fracción, en fracciones simples, obteniendo:

$$X(s) = \frac{4}{195}\frac{-4s+14}{s^2+4} + \frac{2}{195}\frac{8(s+3)-4}{(s+3)^2+16} \quad (9)$$

Por último, para obtener el resultado, se anti-transforma:

$$x(t) = \frac{4}{15}\left(7\operatorname{sen}2t - 4\cos 2t\right) + \frac{2}{15}e^{-3t}\left(8\cos 4t - sen\,4t\right) \quad (10)$$

Donde x(t) es la función que caracteriza el movimiento del cuerpo en en tiempo. Para más información véase [2].

## V. CONCLUSIÓN

En este breve informe se trato de demostrar que la aplicación de la transformada de Laplace favoreció el desarrollo de una solución, facilitando su obtención. Para un ingeniero que este estudiando un problema de la vida real, es importante que tenga en cuenta esta herramienta, ya que el cambio en el dominio de la aplicación, permite que se trabaje algebraicamente, acortando el tiempo necesario para obtener una respuesta.

## REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guia de definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable compleja”, pp.51.

[2] G. James, "Matemát*ematicas Avanzadas para Ingenieria”*, Segunda edición, pp. 135-138.

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Ecuación_diferencial, [acceso el 5 de Agosto de 2013].