Transformada de Laplace: Resolución de sistema Masa-Resorte

Scheck, Luciano Emmanuel

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
luciano92_10@hotmail.com
Agosto 2013

Resumen: Los métodos de la transformada de Laplace tienen un papel clave en el enfoque moderno del análisis y diseño en los sistemas de ingeniería. En el siguiente informe se detallará cómo utilizar dicha transformada para la resolución de las ecuaciones diferenciales que modelan el movimiento armónico simple de un sistema Masa-Resorte.

Palabras clave: Laplace, movimiento, ecuaciones diferenciales.

I. INTRODUCCIÓN

Se define la transformada de Laplace (L) como:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt \tag{1}$$

donde $f(t)$ es la función original, $F(s)$ es la transformada, s es una variable compleja y e^{-st} es llamado el núcleo de la transformación.

Las propiedades que se utilizarán en este trabajo de aplicación serán, considerando el siguiente par de transformadas de Laplace con sus correspondientes regiones de convergencia:

$$\begin{array}{ll} f(t) \leftrightarrow F(s) & Re(s) > p \\ g(t) \leftrightarrow G(s) & Re(s) > q \end{array}$$

Propiedad de linealidad: para α, β ϵ C:

$$\alpha\, f(t) + \beta\, g(t) \leftrightarrow \alpha\, F(s) + \beta\, G(s) \qquad Re(s) > \text{máx}\ (p, q)$$

Propiedad de derivadas:

$$\begin{array}{lll} f^{(n)}(t) \leftrightarrow & s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) & Re(s) > p \\ (-1)^n t^n f(t) \leftrightarrow & F^{(n)}(s) & Re(s) > p \end{array}$$

La transformada de Laplace provee un método para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes al transformarlas, a través de las propiedades antes descriptas, en el problema sencillo de resolver una ecuación algebraica lineal, obteniéndose así una solución de la forma $Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ donde P y Q son polinomios en s. Una vez hecha la transformación, se desarrollan manipulaciones algebraicas y finalmente se aplica la transformación de Laplace inversa $y(t) = L^{-1}\,\{Y(s)\}$ para obtener el resultado del problema planteado. Este procedimiento se conoce como desarrollo de Heaviside.

II. VIBRACIONES MECÁNICAS

Los sistemas mecánicos de traslación pueden ser usados para modelar muchas situaciones e involucran tres elementos básicos: masas, resortes y amortiguadores, cuyas unidades de medida son, respectivamente, Kg (kilogramos), N/m (Newton por metro) y Ns/m (Newtons y segundos por metro). En este caso sólo tendremos en nuestro sistema masas y resortes.

Las variables asociadas son el desplazamiento x(t) (medido en metros) y la fuerza F(t) (medida en Newtons). A continuación se muestra una representación gráfica del sistema mencionado.

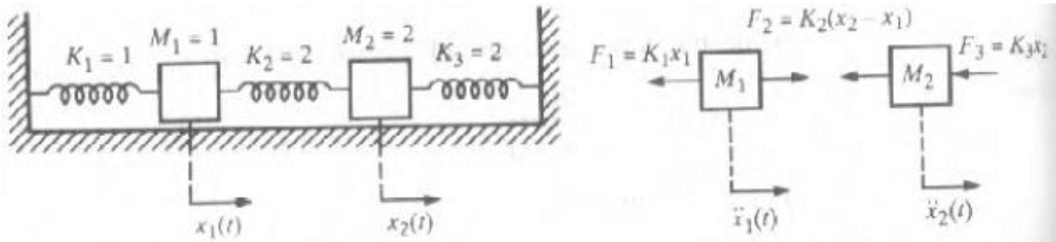

Figura 1. Componentes del sistema mecánico de traslación

Suponiendo que estamos tratando con resortes ideales (esto es, suponiendo que se comportan linealmente), las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos en el tiempo t son

Masa: $$F = M\left(\frac{d^2}{dt}x\right) = M\ddot{x}$$ (Ley de Newton) (2)

Resorte: $$F = k(x_2 - x_1)$$ (Ley de Hooke) (3)

Usando estas relaciones llegamos a las ecuaciones del sistema, las que pueden ser analizadas utilizando las técnicas de la transformada de Laplace.

III. EJEMPLO

Consideremos el sistema mostrado en la Figura 1. Sean las masas $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$, cada una atada a una base fija por un resorte, con constantes $K_1 = 1$ y $K_3 = 2$ y atadas entre sí por un tercer resorte con constante $K_2 = 2$. El sistema es soltado desde el reposo en el tiempo t=0 en una posición en la cual M_1 esta desplazada 1 unidad hacia la izquierda de su posición de equilibrio y M_2 está desplazada 2 unidades a la derecha de su posición de equilibrio. Despreciando los efectos de fricción, determinaremos la posición $x_1(t)$ de M_1 y $x_2(t)$ de M_2 en un tiempo t.

Aplicando la Ley de Newton a M_1 y M_2 se obtiene:

$$M_1\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 = K_2(x_2 - x_1) - K_1x_1$$

$$M_2\ddot{x}_2 = -F_3 - F_2 = -K_3x_2 - K_2(x_2 - x_1)$$

que, sustituyendo por los valores dados en el enunciado del problema da

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2\ddot{x}_2 + 4x_2 - 2x_1 = 0$$

Al aplicarles la transformada de Laplace, llegamos a las ecuaciones

$$(S^2+3)X_1(s)-2X_2(s)=sx_1(0)+\dot{x}_1(0)$$

$$-X_1(s)+(S^2+3)X_2(s)=\ sx_2(0)+\dot{x}_2(0)$$

Incorporando las condiciones iniciales de movimiento (posición y velocidad en t=0) las ecuaciones transformadas son

$$(S^2+3)X_1(s)-2X_2(s)=-s$$

$$-X_1(s)+(S^2+3)X_2(s)=2\,s$$

de donde se despeja

$$X_2(s)=\frac{2s^2+5s}{(s^2+4)(s^2+1)}=-\frac{s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+4}$$

que, al aplicar la transformada inversa de Laplace, da como resultado

$$x_2(t)=\cos t+\cos 2t$$

Luego, como

$$x_1(t)=2x_2(t)+\ddot{x}_2(t)=2\cos t+2\cos 2t-\cos t-4\cos 2t$$

esto es

$$x_1(t)=\cos t-2\cos 2t$$

Así, las posiciones de las masas en el tiempo t son

$$x_1(t)=\cos t-2\cos 2t$$

$$x_2(t)=\cos t+\cos 2t$$

IV. CONCLUSIONES

Es posible observar, del ejemplo anterior, que la utilización de la transformada de Laplace facilita notablemente la resolución de ecuaciones diferenciales de cualquier orden (en este caso de orden uno), posibilitando un análisis rápido y certero de cualquier sistema físico que se presente en el estudio de diversas ramas de la Ingeniería.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 2do. Cuatrimestre 2012, páginas 57-64.

[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, paginas 135-139.