Aplicación mediante el analisis de Fourier:

Señales.

Mauro U. Sarli

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Msarli90@gmail.com
Agosto 2012

Resumen: En este artículo se estudian las series y la transformación de Fourier y la aplicación de las mismas en un problema particular, el cual es, la transmisión de una señal.

Palabras clave: serie de Fourier, Señales.

I. INTRODUCCIÓN

El **análisis tiempo-frecuencia** es un conjunto de técnicas para la caracterización y manipulación de señales cuyas estadísticas varían en el tiempo, como las señales transitorias.

Para ello, se realiza el análisis de Fourier, que se utiliza para representar una función matemática en base a sus componentes de frecuencia senoidales.

En un caso práctico, este se puede realizar en las señales temporales el cual sirve para expresar dichas señales en función de las frecuencias que las conforman. Por tanto, al aplicar análisis de Fourier pasamos del dominio del tiempo al de la frecuencia.

En definitiva, la transformada de Fourier se utiliza para pasar al dominio de la frecuencia una señal para así obtener información que no es evidente en el dominio temporal. Por ejemplo, es más fácil saber sobre qué ancho de banda se concentra la energía de una señal analizándola en el dominio de la frecuencia.

II. APLICACIÓN

A. La transformada de Fourier

Representa una función f(t) definida en el intervalo $(-\infty,\infty)$, mediante otra función, su transformada de Fourier, definida como:

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\ dt$$

Donde e^{-iwt} es la función exponencial compleja. La función F(w) representa las amplitudes de las infinitas componentes espectrales de f(t) y se conoce como función de densidad espectral.

La transformación inversa, la transformada inversa de Fourier, recupera f(t) a partir de su transformada, F(W), mediante

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}\ dw$$

B. El espectro de Fourier

Si la función o señal, F(w), es la transformada directa de Fourier de la función o señal, f(t), lo que notaremos mediante

$$F[f(t)] = F(w);$$

Entonces F(w) representa las amplitudes relativas de las diferentes componentes exponenciales complejas. Ambas representaciones (la del tiempo f(t) y la de la frecuencia F(w)) especifican de forma única la misma señal.

Como ya sabemos, en general F(w) es compleja, por lo tanto, se necesitan ambos diagramas (el módulo y la fase) para representar gráficamente a F(w).

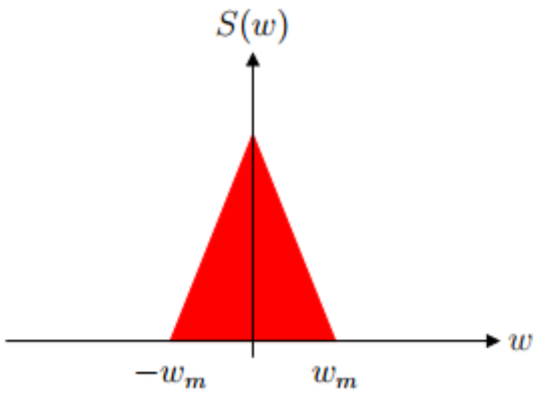
C. Señalas limitadas en banda.

Cuando F(w) queda definida en un intervalo de frecuencias finito, se dice que f(t) está limitada en banda.

Los espectros de Fourier de todas las funciones reales, que no son complejas, es decir, que no poseen parte imaginaria, están, por necesidad física, limitadas en banda.

Además, los módulos de los espectros de Fourier de todas las señales son simétricos respecto de la componente de frecuencia 0.

Esto significa que si w_m es la máxima componente de frecuencia de f(t), el módulo de su espectro de Fourier es de la siguiente forma:

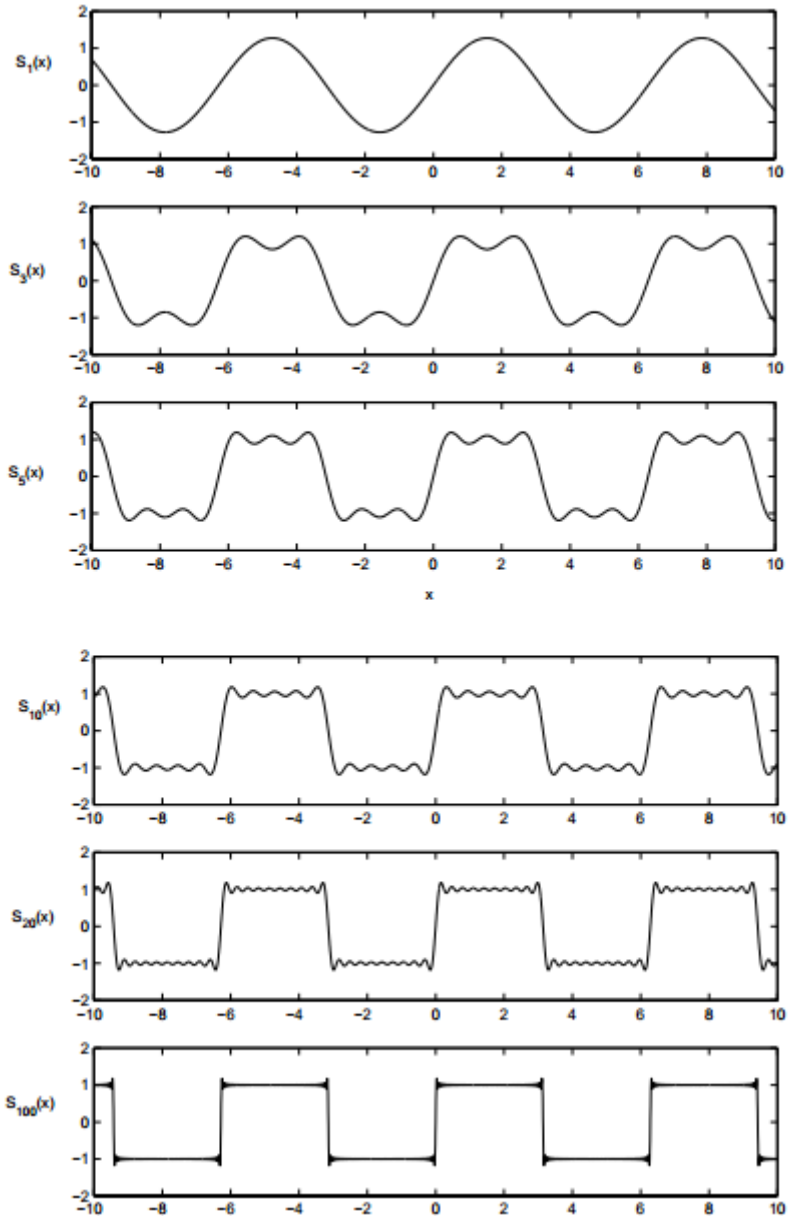


D. Ancho de banda usado por una señal digital

Es evidente que las señales digitales generalmente no son periódicas. Sin embargo, y por suerte para nuestro análisis, la señal digital que mayores requerimientos de ancho de banda posee es aquella que representa a la secuencia de bits …010101… , que sí genera una señal periódica. A esta secuencia se la conoce por ello como la peor secuencia posible, porque genera la señal digital con periodo más corto y por tanto con la componente de frecuencia fundamental w_0 más alta.

Nótese que sólo si la señal es periódica se puede hablar de frecuencia fundamental.

Supongamos que nuestro sistema de representación utiliza una amplitud de señal 1 para codificar un 1 y -1 para un 0. Bajo estas circunstancias, la siguiente figura muestra gráficamente cómo sería el proceso de aproximación mediante la serie de Fourier para la señal digital que representa a la peor secuencia posible,

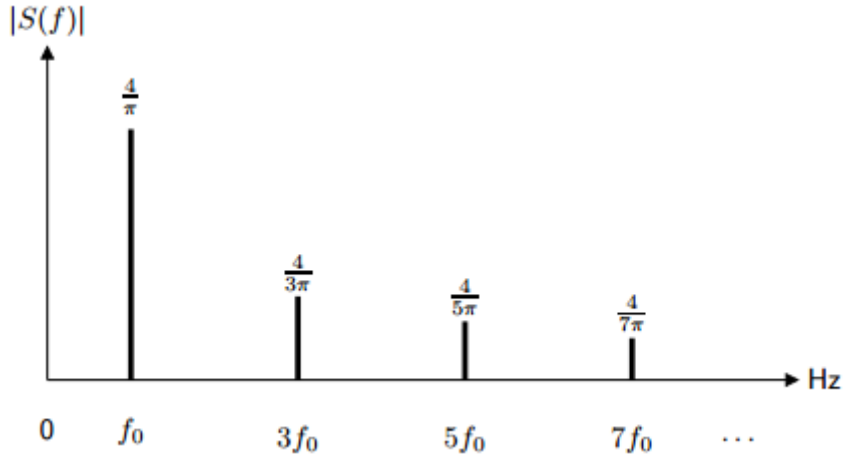


que analíticamente consiste en

$$s(t) = \frac{4}{\pi}\left(sin(w_0 t) + \frac{1}{3}sin(3\,w_0 t) + \frac{1}{5}sin(5\,w_0 t) + \frac{1}{7}sin(7\,w_0 t) + \frac{1}{9}sin(9\,w_0 t) + \cdots\right)$$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)}\, sin((2k+1)\,w_0 t)$$

Como puede apreciarse, todas las componentes de frecuencia que son múltiplos pares de w_0 (la frecuencia fundamental) son nulas, lo que genera un espectro de frecuencias disperso (no denso) característico de todas las señales periódicas. Esto se muestra gráficamente en la siguiente figura:



donde $w_n = 2\pi f_n$ es la n-ésima componente de frecuencia de s(t) expresada en radianes por segundo (f_n se mide por tanto en Hercios o Hz).

E. Efecto de la tasa de bits en el espectro de una señal digital

El precio que se paga por usar señales digitales (cuantificadas y discretizadas en el tiempo) es que la tasa de transferencia de información por intervalo de tiempo finito es una tasa finita. Esto significa que la señal digital debe conservar su valor durante un cierto intervalo de tiempo mínimo que permita al receptor reconocer el bit (o bits) de información transportado(s).

Desde el punto de vista del espectro de frecuencias de una señal digital, la reducción de dicho intervalo temporal implica una expansión en el dominio de la frecuencia de las diferentes componentes de frecuencia. Nótese que al aumentar w_0 aumentan también, de forma proporcional, las w_n.

Por tanto, a mayor tasa de bits, proporcionalmente más ancho de banda es necesario para transportar la señal digital.

III. CONCLUSION

En conclusión, podemos decir que la teoría que otorga la materia Funciones de Variable Compleja brinda incontables herramientas para el futuro en cualquier rama de la ingeniería.

En este caso, se ha analizado una de las tantas aplicaciones que se pueden realizar mediante la utilización de series de Fourier. Podemos apreciar que no es estrictamente necesario un conocimiento completo del tema para poder realizar esta, como otra de las aplicaciones, solo basta con poseer las fórmulas adecuadas y un leve conocimiento del tema en cuestión. Igualmente se recomienda un estudio más profundo del tema para un mejor entendimiento del mismo, según sea la necesidad.

Referencias

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 7 de agosto de 2012]
[2] *Arquitectura de computadoras electrónicas*, [internet], disponible en http://www.ace.ual.es/
[3] Glyn James, *"Matemáticas avanzadas para ingeniería, segunda edición*".
[4] G. Calandrini *"Guia de definiciones y teoremas en el curso de función variable compleja"*