Aplicación de la Transformada de Laplace al estudio de las vibraciones en una viga

Santiago Schustik

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
chimeee@gmail.com

Febrero 2013

Resumen: En el presente trabajo se estudiarán las vibraciones en una viga y se determinará el desplazamiento de cada punto de la viga en función del tiempo y de los esfuerzos aplicados. Para ello se requerirán conocimientos de mecánica de materiales y de análisis matemático, utilizando la transformada de Laplace en la resolución de las ecuaciones diferenciales correspondientes que surgen del equilibrio de tensiones decada punto del material que la compone.

Palabras clave: Transformada, Laplace, vibraciones, viga, teorema de residuos.

I. Introducción

El estudio de las vibraciones en una viga es particularmente interesante, ya que normalmente se analizan los estados inicial y final de la viga, sin saber cuál es la forma de la viga para un instante dado.
Conocer la posición que tuvo cada punto de la viga luego de una evolución sirve, entre otros, para determinar si la viga fue sometida a tensiones mayores a las que puede soportar, con lo que aparecen problemas de plastificación (pérdida de la capacidad de reacción) o ruptura de la barra.
Se obtiene, por lo tanto, una fórmula que nos permite saber cuál fue el estado de tensiones para la viga y las solicitaciones que por ende se desarrollaron.

II. Análisis del problema de vibraciones

A continuación, pasamos a analizar el problema de vibraciones en
una barra (viga) sometida a solicitaciones longitudinales. Se utilizaron transformadas de Laplace para resolver la ecuación diferencial involucrada en cada caso.
Consideraremos a continuación una perturbación en un extremo de una viga sólida que supondremos consiste en un esfuerzo en la misma dirección al eje de la misma. En estas condiciones, la perturbación se propagará a través de la viga y la velocidad con que lo hace estará determinada por las propiedades físicas del material que la constituye.
Bajo la acción de una tracción (o compresión) en la dirección x, cada sección de la viga sufre un desplazamiento paralelo al eje de la misma.
El esfuerzo normal (en la ausencia de otras solicitaciones) será proporcional a la deformación lineal:

$$\sigma_x = E\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{N}{F}$$

donde la variable Y(x,t) representa el desplazamiento longitudinal que dependerá tanto de la posición a lo largo de la varilla como también del tiempo
luego de la aplicación de la perturbación.
Ahora bien, para obtener la ecuación que rige las vibraciones en la viga, analizaremos una sección genérica F. La misma sufrirá en un momento dado, una fuerza neta que llamaremos dN. Siendo ρ la densidad del material, entonces la masa de la sección será

$$dm = \rho F\, dx$$

que será acelerada por la fuerza dN con la siguiente aceleración a:

$$a = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

Por lo tanto, la ecuación del movimiento será:

$$dN = \rho F\, dx \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

Y entonces:

$$\frac{dN}{dx} = \rho F \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

Por otra parte, de la primer expresión puede deducirse que:

$$dN = EF \frac{\partial Y}{\partial x}$$

y por lo tanto

$$\frac{dN}{dx} = EF \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Igualando el término dN/dx en las expresiones anteriores, resulta una ecuación del tipo:

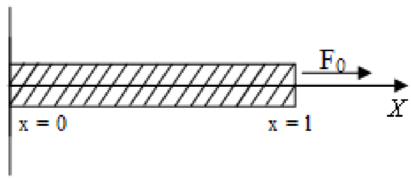
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Esta ecuación describe el movimiento de una viga que puede vibrar longitudinalmente (o sea en la dirección X). La variable Y(x,t) es el desplazamiento longitudinal desde la posición de equilibrio del corte seccional en x. La constante

$$c^2 = \frac{E}{\rho}$$

donde E es el módulo de elasticidad, que es una propiedad del material y ρ es la densidad (masa por unidad de volumen de la viga). El valor de c constituye entonces la velocidad de propagación de las vibraciones en la viga y vemos que están determinadas directamente por las propiedades del material que la conforma.

El problema consiste en averiguar el desplazamiento longitudinal de cualquier punto x de la viga, para cualquier momento t > 0, cuando se aplica una fuerza constante por unidad de área F_0.



III. Resolución mediante transformada de Laplace

Siendo Y(x,t) el desplazamiento longitudinal de cualquier punto x de la viga en el tiempo t, las condiciones de frontera son:

$$\begin{cases} Y(x,0) = 0 \\ Y_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y(0,t) = 0 \\ Y_x(l,t) = \dfrac{F_0}{E} \end{cases}$$

Transformando por Laplace encontramos que:

$$y(x,s) = L\big(Y(x,t)\big)$$

$$s^2 y(x,s) - sY(x,0) - Y_t(x,0) = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Recordando las condiciones frontera: $Y(x,0) = 0$, $Y_t(x,0) = 0$ con lo que nos queda:

$$s^2 y(x,s) = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2}y = 0 \qquad \text{A: } \begin{cases} y(0,s) = 0 \\ y_x(l,s) = \frac{F_0}{E\,s} \end{cases}$$

La solución es:

$$y(x,s) = c_1 \cosh(\frac{s\,x}{c}) + c_2 \sinh(\frac{s\,x}{c})$$

Reemplazando en A:

$$y(0,s) = 0 = c_1 \cosh(0) + 0$$

Por lo que c_1 es nulo, por lo que nos queda:

$$y(x,s) = c_2 \sinh\left(\frac{s\,x}{c}\right) \qquad Y_x(x,s) = c_2\left(\frac{s}{c}\right)\cosh\left(\frac{s\,x}{c}\right)$$

Reemplazando en A: $y_x(l,s) = \frac{F_0}{E\,s} = c_2\left(\frac{s}{c}\right)\cosh\left(\frac{s\,l}{c}\right)$

Reagrupando: $c_2 = \frac{F_0\,c}{E\,s^2\cosh\left(\frac{s\,l}{c}\right)}$

Por lo tanto, llegamos a: $y(x,s) = c_2 \sinh(\frac{s\,x}{c}) = \frac{F_0\,c\sinh(\frac{s\,x}{c})}{E\,s^2\cosh\left(\frac{s\,l}{c}\right)}$

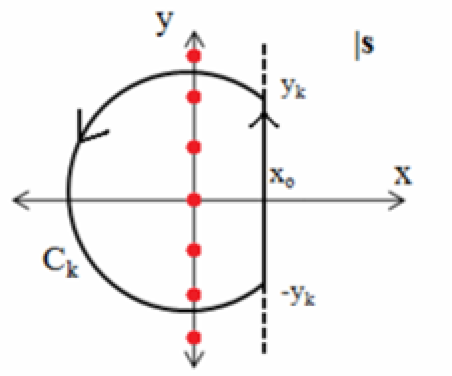
A continuación buscaremos obtener la función anti-transformada y(x,t) que corresponderá al desplazamiento de cada punto de la barra.
Puede verse fácilmente que y(x,s) tiene un polo en s=0 y además presenta infinitas singularidades dadas por la expresión:
$\cosh\left(\frac{s\,l}{c}\right) = 0$, por lo que las mismas se hallan sobre el eje imaginario en los puntos:

$$s_k = \frac{c\pi}{l}\left(k + \frac{1}{2}\right)i\,, \quad k \in Z$$

El problema reside en buscar la forma de realizar la integral compleja "encerrando" las infinitas singularidades. Podemos ver que integrando a lo largo de una recta con abscisa x_0 y cerrando la curva con una circunferencia Ck alrededor de cero (ver figura), entonces la integral compleja puede escribirse, aplicando el teorema de los residuos, como sigue:

[2] **Teorema 1** *Si C es un contorno cerrado simple, positivamente orientado, sobre y dentro del cual una función f es analítica a excepción de un numero finito de puntos singulares interiores a C, entonces*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\, f(z)$$



Para hallar el valor de la anti-transformada necesitaremos calcular los residuos de la función $\mathrm{y(x,s)e^{st}}$
Tanto el origen como las infinitas singularidades sobre el eje imaginario son aisladas ya que la función no tiene puntos de acumulación de singularidades ni puntos de ramificación que requieran cortaduras del dominio. Dicho esto podemos tomar

$$\lim_{s\to 0} y(x,s)e^{st} = \lim_{s\to 0} \frac{\mathrm{F_0\ c}\, e^{st} \sinh(\frac{\mathrm{s\ x}}{\mathrm{c}})}{\mathrm{E\ s^2} \cosh\left(\frac{\mathrm{s\ l}}{\mathrm{c}}\right)} \overset{ind}{=} \frac{0}{0} \overset{l'H}{=} \infty$$

Lo que muestra que s=0 es un polo de $\mathrm{y(x,s)e^{st}}$. Además puede verse que

$$\lim_{s\to 0} sy(x,s)e^{st} = \lim_{s\to 0} \frac{\mathrm{F_0\ c}\, e^{st} \sinh(\frac{\mathrm{s\ x}}{\mathrm{c}})}{\mathrm{E\ s} \cosh\left(\frac{\mathrm{s\ l}}{\mathrm{c}}\right)} \overset{ind}{=} \frac{0}{0} \overset{l'H}{=} \lim_{s\to 0} \frac{\mathrm{F_0\ t\ c}\, e^{st} \sinh\left(\frac{\mathrm{s\ x}}{\mathrm{c}}\right) + \mathrm{F_0\ x}e^{st} \cosh\left(\frac{\mathrm{s\ x}}{\mathrm{c}}\right)}{\mathrm{E}\ \cosh\left(\frac{\mathrm{s\ l}}{\mathrm{c}}\right) + \frac{\mathrm{Es\ l}}{\mathrm{c}} \sinh\left(\frac{\mathrm{s\ l}}{\mathrm{c}}\right)} = \frac{\mathrm{F_0 x}}{\mathrm{E}}$$

Por lo que s=0 es un polo de primer orden.
De forma equivalente puede demostrarse que las infinitas singularidades
$\mathrm{s_k} = \frac{\mathrm{c\pi}}{\mathrm{l}}\left(k+\frac{1}{2}\right) i$
Corresponden a polos de primer orden. Estamos entonces en condiciones de calcular sus residuos.

Siendo $\begin{cases} P(s) = \mathrm{F_0\ c}\, e^{st} \sinh(\frac{\mathrm{s\ x}}{\mathrm{c}}) \neq 0 \\ Q(s) = \mathrm{E\ s} \cosh\left(\frac{\mathrm{s\ l}}{\mathrm{c}}\right) = 0 \end{cases}$

$$Res(y(x,s)e^{st}) = \frac{P(s)}{Q'(s)} = \frac{\mathrm{F_0\ c}\, e^{st} \sinh(\frac{\mathrm{s\ x}}{\mathrm{c}})}{\mathrm{2E\ s} \cosh\left(\frac{\mathrm{s\ l}}{\mathrm{c}}\right) + \frac{\mathrm{Es^2\ l}}{\mathrm{c}} \sinh\left(\frac{\mathrm{s\ l}}{\mathrm{c}}\right)} = \frac{\mathrm{F_0\ c}\, e^{\frac{\mathrm{c\pi}}{\mathrm{l}}\left(k+\frac{1}{2}\right) i\, t} \sinh(\frac{\mathrm{x\pi}}{\mathrm{l}}\left(k+\frac{1}{2}\right) i)}{-\mathrm{E}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{l}}\pi^2 \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \sinh\left(\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{i}\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{F_0\ c}\, e^{\frac{\mathrm{c\pi}}{\mathrm{l}}\left(k+\frac{1}{2}\right) i\, t} i \sinh(\frac{\mathrm{x\pi}}{\mathrm{l}}\left(k+\frac{1}{2}\right))}{\mathrm{E}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{l}}\pi^2 \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{i(-1)^{k+1}}} = \frac{e^{\frac{\mathrm{(x+ct)\pi}}{\mathrm{l}}\left(k+\frac{1}{2}\right) i} - e^{-\frac{\mathrm{(x-ct)\pi}}{\mathrm{l}}\left(k+\frac{1}{2}\right) i}}{\frac{\mathrm{2iE}}{\mathrm{F_0 l}}\pi^2 \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{(-1)^{k+1}}}$$

Finalmente, operando y reacomodando los términos puede obtenerse:

$$y(x,t) = \frac{\mathrm{F_0 x}}{E} + \frac{\mathrm{8F_0 l}}{E\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{(-1)^k}}{\mathrm{(2k+1)^2}} \cos\left[\frac{\mathrm{\pi(2k+1)ct}}{2l}\right] \sin\left[\frac{\mathrm{\pi(2k+1)x}}{2l}\right]$$

IV. Conclusión

Siendo Y(x,t) el desplazamiento longitudinal de cualquier punto x de la viga en el tiempo t, las condiciones de Hemos analizado el problema de las vibraciones en una viga. Hemos visto también que las producen tensiones en las vigas y consecuentemente esfuerzos que pueden ser no deseados. Hemos visto ecuaciones que nos dicen cómo va a oscilar una viga bajo una fuerza conocida, con lo que podemos calcular entonces cómo van a ser las solicitaciones para cada punto de la viga y encontrar si alguno de estos puntos excedió el valor de tensión de plastificación o rotura.

V. Referencias

[1] Facultad de Ingeniería Universidad de Buenos Aires. Curso Ing. Gustavo M. Murmis.
[2] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”.