Función de transferencia y su respuesta de frecuencia

Tifany A. Rosas

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
rosastifany@hotmail.com

Agosto 2012

Resumen: En la presente nota de aplicación se pretende desarrollar cómo la transformada de Laplace permite definir una función de transferencia de un sistema lineal invariante. Además, se ilustrará el procedimiento por el cual la respuesta de frecuencia puede obtenerse fácilmente de dicha función.

Palabras clave: transformada de Laplace, función de transferencia, respuesta de frecuencia.

I. Introducción

Antes de iniciar el desarrollo propio del artículo, es necesario brindar un contexto teórico y técnico que permita al lector comprender e interiorizarse mejor en el tema.

Definimos la transformada de Laplace de una función *f(t)* mediante la expresión

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (1)$$

donde *s* es una variable compleja.

La función original *f(t)* se llama transformada inversa de Laplace, es decir

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \qquad (2)$$

En cuanto a las funciones de transferencia, se usan frecuentemente en ingeniería para caracterizar las relaciones de entrada-salida de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, y juegan un papel importante en el análisis y diseño de dichos sistemas.

Por último, la respuesta de frecuencia se refiere a la respuesta en estado estable de un sistema sujeto a una señal senoidal de amplitud fija, pero con una frecuencia que varía en determinado rango.

II. Función de transferencia. Respuesta de frecuencia.

La función de transferencia de un sistema lineal invariante está definida como la razón de la transformada de Laplace de la salida del sistema (o función de respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada del sistema (o función de fuerza), bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero (esto es, el sistema está inicialmente en un estado de reposo).

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo caracterizado por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 u \qquad (3)$$

donde $n \geq m$, las *a* y las *b* son coeficientes constantes, y *x(t)* es la respuesta del sistema o salida correspondiente a la entrada o término de fuerza *u(t)* aplicado en tiempo *t=0*.

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (3) y teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son cero, obtenemos

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0) X(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0) U(s) \tag{4}$$

Por lo tanto la función de transferencia del sistema *G(s)* se define como

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} \tag{5}$$

Denotando

$$P(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0 \tag{6}$$

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{7}$$

la función de transferencia puede expresarse como

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{8}$$

G(s) puede escribirse

$$G(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)} \tag{9}$$

donde y son los ceros y los polos de la función de transferencia, respectivamente.

De forma gráfica, el sistema se puede visualizar como el diagrama de la figura 1.

Consideremos ahora que la entrada al sistema es una señal senoidal, $u(t) = Asen(wt)$, aplicada en el tiempo *t=0*. La repuesta del sistema *x(t)* para *t ≥0* está determinada por

$$X(s) = G(s) L\{Asen(wt)\} = G(s) \frac{Aw}{s^2 + w^2} = \frac{b_m}{a_n} \frac{Aw(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)(s - wi)(s + wi)} \tag{10}$$

que, expandiendo en fracciones parciales da

$$X(s) = \frac{\alpha_1}{s - iw} + \frac{\alpha_2}{s + iw} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{s - p_i} \tag{11}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots, \beta_n$ son constantes.

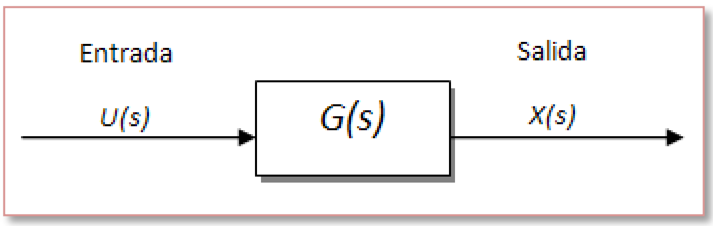

Figura 1: Diagrama en bloque de la función de transferencia.

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (11), la respuesta del sistema *x(t)* está dada por

$$x(s) = \alpha_1 e^{iwt} + \alpha_2 e^{-iwt} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j e^{p_j t} \qquad t \geq 0 \tag{12}$$

donde $\alpha_1 = \frac{A}{2i} G(iw)$ y $\alpha_2 = \frac{A}{2i} G(-iw)$.

Para sistemas prácticos, los términos en el dominio del tiempo $\beta_j e^{p_j t}$, *j*=1, 2,…, n, tienden a cero conforme t crece y no contribuirán a la respuesta en estado estacionario $x_{ee}(t)$ del sistema. Por lo tanto

$$x_{ee}(t) = \alpha_1 e^{iwt} + \alpha_2 e^{-iwt} \tag{13}$$

Reemplazando constantes por sus respectivos valores y tomando $s = iw$ obtenemos

$$x_{ee}(t) = \frac{A}{2i} G(iw) e^{iwt} - \frac{A}{2i} G(-iw) e^{-iwt} \tag{14}$$

También podemos expresar *G(iw)* de forma polar de la siguiente manera

$$G(iw) = | G(iw) | \, e^{i \arg(G(iw))} \tag{15}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (15), mediante cálculos matemáticos, escribimos a la función de salida como

$$x_{ee}(t) = A | G(iw) | \, sen(wt + \arg G(iw)) \tag{16}$$

La ecuación (16) nos muestra que si un sistema lineal estable con función de transferencia *G(s)* está sujeto a una entrada senoidal, la respuesta en estado estacionario también será senoidal, con igual frecuencia *w*. Además, nos indica en forma precisa de qué manera se modifican la amplitud y la fase con respecto a la excitación.

Las variaciones tanto de magnitud |*G(iw)*| como del argumento *arg G(s)* cuando varía la frecuencia *w* de la entrada senoidal, representan la respuesta de frecuencia del sistema, donde la magnitud |*G(iw)*|constituye la ganancia de amplitud del sistema y el argumento *arg G(s)* representa el corrimiento de fase.

III. CONCLUSIÓN

El objetivo del presente artículo fue mostrar una de las múltiples aplicaciones de la transformada de Laplace. Se intentó relacionar dicha herramienta con dos cuestiones importantes a la hora del análisis y diseño de sistemas.

Pudimos comprobar que utilizando dicha transformada, obtenemos un método sencillo y práctico de estudio.

REFERENCIAS

[1] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

[2] G. Calandrini, *Guía de Definniciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja*, 1er. Cuatrimestre 2012.

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, Función de transferencia [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Función_de_transferencia, [acceso el 15 de agosto de 2012].
[4] F. Miyara, *Respuesta en frecuencia de amplificadores,* [internet], disponible en http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3/rtafrec.pdf, [acceso el 16 de agosto de 2012].