Transformada de Laplace: Líneas de Transmisión

Aplicación a problemas de valor frontera

Rezzuti, Federico

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
federezzu@yahoo.com.ar

10 de Julio 2015

Resumen: Varios problemas de la ciencia y de la ingeniería al ser formulados matemáticamente conducen a ecuaciones diferenciales parciales que involucran una o más funciones incógnitas junto con ciertas condiciones, provenientes de situaciones físicas, para dichas funciones. Las condiciones se llaman "condiciones de frontera". El problema de encontrar soluciones para una ecuación que satisface ciertas condiciones de frontera se llama un "problema de valor frontera". En esta nota de aplicación veremos cómo resolver uno de estos problemas, el cálculo de tensión y corriente eléctrica en una línea de transmisión, aplicando una poderosa herramienta matemática, la Transformada de Laplace.

Palabras clave: valor frontera, Transformada de Laplace, Línea de Transmisión.

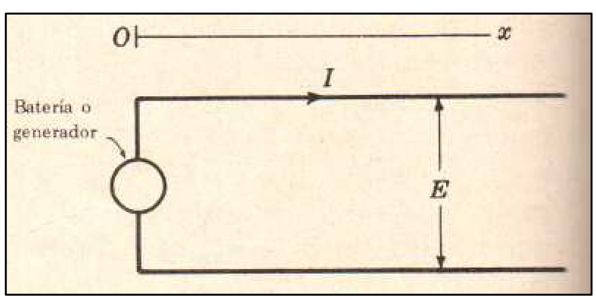
I. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Es una técnica Matemática que forma parte de ciertas transformadas integrales como la transformada de Fourier, la transformada de Hilbert, y la transformada de Mellin, entre otras. Estas transformadas están definidas por medio de una integral impropia y cambian una función en una variable de entrada en otra función en otra variable. La transformada de Laplace se define de acuerdo a (1) y su inversa (2):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (2)$$

II. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN



En este problema, utilizaremos ecuaciones diferenciales parciales simultáneas para la corriente I y el voltaje E (o diferencia de potencial), de una línea de transmisión en cualquier posición "x" y en cualquier instante de tiempo "t". Las constantes "R", "L", "G" y "C" son respectivamente la resistencia, la inductancia, la conductividad y la capacidad por unidad de longitud. El extremo "x = 0" se llama "extremo emisor". Cualquier otro valor dad de "x" puede considerarse como "extremo receptor".

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t} \qquad (3)$$

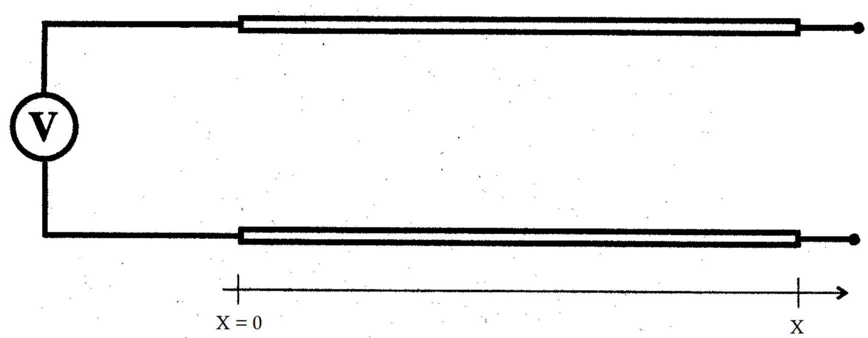
$$\frac{\partial I}{\partial x} = -GE - C\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (4)$$

III. PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA MEDIANTE LA TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Al hacer uso de la transformación de Laplace (con respecto a "***t***" o "***x***") en un problema de valor frontera en una dimensión, las ecuaciones diferenciales parciales pueden transformarse en ordinarias. La solución puede obtenerse resolviendo esta ecuación ordinaria e invirtiendo, bien sea por la fórmula de inversión compleja (2), o aplicando directamente alguna de las propiedades de la transformada de Laplace.

Para problemas en dos dimensiones es a veces conveniente aplicar dos veces la transformada de Laplace (por ejemplo, primero con respecto a "***t***" y luego con respecto a "***x***") y llegar a una ecuación diferencial ordinaria. En tal caso, la solución se encuentra por una *"**doble inversión**"*. Este proceso se conoce con el nombre de *"**transformación iterada de Laplace**"*. Puede aplicarse una técnica similar en problemas de tres (o más) dimensiones. Los problemas de valor frontera pueden resolverse a veces mediante el uso combinado de transformada de Fourier y Laplace.

IV. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A LÍNEAS DE TRANSMISIÓN



Una línea de transmisión de inductancia y conductancia, por unidad de longitud, despreciables tienen un voltaje en su extremo emisor, "x = 0", dado por:

$$E(x,t) = E(0,t) = \begin{cases} E_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Para hallar el valor de "E(x,t)" y la corriente "I(x,t)" sobre cualquier punto "x > 0" en cualquier punto "t > 0" (tomando "L = 0" y "G = 0"), la ecuaciones (3) y (4) quedarán de la forma:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -RI \qquad (5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (6)$$

Teniendo en cuenta que, las condiciones de frontera son:

$$E(x,o) = 0, \qquad I(x,0) = 0, \qquad E(x,t) = E(0,t) = \begin{cases} E_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}, \qquad |E(x,t)| < M$$

Aplicando la transformada de Laplace, usando la notación "$\boldsymbol{\mathcal{L}\{E(x,t)\} = \tilde{E}(x,s)}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}\{I(x,t)\} = \tilde{I}(x,s)}$", y transformando las ecuaciones (5) y (6), tenemos que:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} = -R\tilde{I} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x} = -C[s\tilde{E} - E(x,0)] \qquad (8)$$

Como “E(x,0) = 0”, entonces la ecuación (8) nos queda:

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x} = -Cs\tilde{E} \qquad (9)$$

Derivando entonces las ecuaciones (7) con respecto a “x” y teniendo en cuenta la ecuación (9), eliminamos a “$\tilde{\boldsymbol{I}}$”, y obtenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} = -R\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x} = RCs\tilde{E} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} - RCs\tilde{E} = 0 \qquad (10)$$

Proponiendo una solución general para la ecuación (10) de la siguiente forma:

$$\tilde{E}(x,s) = C_1 e^{\sqrt{RCs}x} + C_2 e^{-\sqrt{RCs}x} \qquad (11)$$

Por la condición de acotación, C1=0. Entonces la ecuación (11) nos queda:

$$\tilde{E}(x,s) = C_2 e^{-\sqrt{RCs}x} \qquad (12)$$

Si escribimos a “E(0,t) = G(t)” y “$\boldsymbol{\mathcal{L}\{E(0,t)\} = \tilde{E}(0,s) = g(s)}$”, entonces por la ecuación (11): “C2=g(s)”; por lo tanto, esta ecuación nos quedara definida de la forma: “$\boldsymbol{\tilde{E}(0,s) = g(s)e^{-\sqrt{RCs}x}}$” .

Usando el “teorema de la convolución”, entonces nos queda que:

$$E(x,t) = \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{RCx^2}{4u}} G(t-u)\,du \qquad (13)$$

Ahora bien, como:

$$G(t-u) = \begin{cases} E_0 & 0 < t-u < T \quad o \quad t-T = u < t \\ 0 & \qquad t-u > T \qquad\qquad u < t-T \end{cases} \qquad (14)$$

Se deduce de la ecuación (14) que si t > T, entonces la ecuación (13) nos queda definida de la forma:

$$E(x,t) = \int_{t-T}^{t} \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{RCx^2}{4u}} E_0\,du \qquad (15-1)$$

$$E(x,t) = \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}}} e^{-v^2}\,dv \qquad (15-2), \quad tomando\ \frac{RCx^2}{4u} = v^2$$

$$E(x,t) = E_0\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}}} e^{-v^2}dv - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}} e^{-v^2}dv\right\} \qquad (15-3)$$

$$E(x,t) = E_0\left\{fer\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}}\right) - fer\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right)\right\} \qquad (15-4)$$

De donde, “fer(...)” es la “función error”. En tanto que, si “0 < t < T”, tenemos de la ecuación (13) y (14) que:

$$E(x,t) = \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} E_0 du = \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2}\,dv$$

$$E(x,t) = E_0\left\{1 - fer\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = E_0 fcer\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right) \qquad (16)$$

Acomodando, tendremos que:

$$E(x,t) = \begin{cases} E_0 fer\left(\dfrac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right) & 0 < t < T \\ fer\left(\dfrac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}}\right) - fer\left(\dfrac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right) & t > T \end{cases} \qquad (17)$$

Y por último, por despeje de la ecuación (5) tenemos que: "$\boldsymbol{I = -\frac{1}{R}\frac{\partial E}{\partial x}}$” entonces al derivar obtenemos:

$$I(x,t) = \begin{cases} \dfrac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{C}{R}}\, t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t} & 0 < t < T \\ \dfrac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{C}{R}}\left[t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t} - (t-T)^{-3/2} e^{-RCx^2/4(t-T)}\right] & t > T \end{cases} \qquad (18)$$

Y tenemos así, por las ecuaciones (17) y (18), los valores de voltaje “E(x,t)” y corriente “I(x,t)” sobre cualquier punto x > 0, para cualquier tiempo t > 0.

V. CONCLUSIÓN

La $\mathcal{L}\{\ldots\}$ Transformada de Laplace permite convertir las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas en el “plano s”. Al resolver estas ecuaciones algebraicas, se obtiene la solución total: la solución homogénea (impulsiva o transitoria) y la particular (permanente).

Luego, desde allí se puede despejar la variable más fácilmente buscada, luego, aplicando la $\mathcal{L}\{\ldots\}^{-1}$ Transformada Inversa de Laplace (Anti-transformada), se puede determinar la variable en el dominio del tiempo “t”. Si existen componentes con condiciones iniciales, es más sencillo pasar las expresiones al “plano s”, e incorporar dichas condiciones. La parte más complicada resulta entonces, el proceso de determinar la transformada inversa.

VI. REFERENCIAS

[1] Serie de Compendios SCHAUM - Teoría y problemas de Transformadas de Laplace – Murray R. Spiegel;

[2] Circuitos Eléctricos – Nahvi y Edminister – Serie SCHAUM 4° Edición;

[3] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. 1er. Cuatrimestre 2015, pp.54-68. 2015;