Transformada de Laplace en resolución de Ecuaciones Diferenciales aplicadas a Circuitos LRC

Polvara Santiago

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
santiagopolvara@hotmail.com
Julio 2012

Resumen: En este informe se desarrollara la aplicación de la Transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, puntualizando en la resolución de circuitos LRC. Se utilizara un ejemplo para dicha aplicación.

Palabras clave: transformada de laplace, ecuaciones diferenciales, circuitos LRC.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace es de gran utilidad ya que permite reducir ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes a simples expresiones algebraicas de sencilla resolución.

Dicha transformada, matemáticamente esta definida de la siguiente forma:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Pueden utilizarse tablas y propiedades de transformaciones para facilitar la resolución de la transformada, sin la necesidad de resolver la integral.

Para el planteo de las ecuaciones diferenciales en esta aplicación, se debe tener en cuenta las **leyes de Kirchhoff**, definidas a continuación:

Ley 1: La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es cero.

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k = I_1 + I_2 + I_3 \ldots + I_n = 0$$

Ley 2: La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero.

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = V_1 + V_2 + V_3 \ldots + V_n = 0$$

El uso de estas leyes nos lleva a las ecuaciones de circuito, las cuales pueden ser analizadas usando las técnicas de la transformada de Laplace.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

Considerando el sistema mostrado en la figura 1, un circuito LRC,

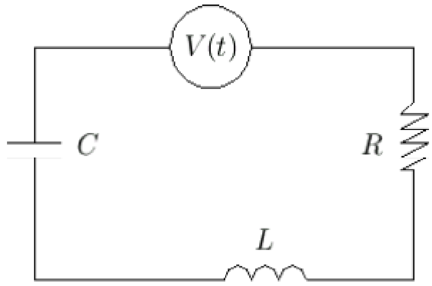

Figura 1 – Circuito LRC

donde la inductancia L (medida en henrys, H), la resistencia R (medida en Ohms) y la capacidad de condensador C (medida en faradios) se consideran constantes. Se tiene entonces que la carga q(t) que circula por el circuito está dada por la ecuación:

$$Lq''(t) + rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = V(t) \tag{1}$$

y dado que la intensidad I(t) es la derivada de la carga, de (1) obtenemos:

$$LI'(t) + RI(t) + \int_0^t \frac{I(s)ds}{C} = V(t) \tag{2}$$

De forma similar, si tenemos un circuito con varias ramas y más elementos, como por ejemplo el de la Figura 2.

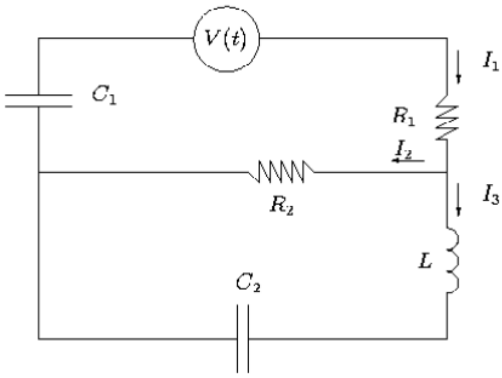

Figura 2 – Circuito LRC con mas ramas.

El cual podemos deducir a partir de las ecuaciones de Kirchoff que las intensidades que circulan por los hilos eléctricos del circuito vienen dadas por:

$$0 = I_1 - I_2 - I_3\ ;\ V(t) = I_1R_1 + \frac{I_2}{C_2} + \frac{I_2}{C_2}\ ;\ 0 = -I_2R_2 + I_3L + \frac{I_3}{C_2}$$

Si suponemos los elementos del circuito constantes, salvo a lo mejor el voltaje V (t), que supondremos una función derivable, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

La Transformada de Laplace es una herramienta que permite transformar los problemas anteriores en problemas algebraicos y, una vez resuelto este problema algebraico más fácil a priori de resolver, calcular a partir de la solución del problema algebraico la solución del problema de ecuaciones diferenciales.

III. EJEMPLO

El objetivo es obtener la carga q(t) del capacitor de la figura 1 y la corriente resultante, las cuales varían en el tiempo. Suponiendo que L=1 H, R= 160 ohms, C= 10^{-4} V(t)=20 volts.

Volviendo a utilizar las ecuaciones de Kirchhoff obtenemos:

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int Idt = V(t) \tag{3}$$

Sabiendo que $I = \frac{dq}{dt}$, de (3) se tiene:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t) \tag{4}$$

Ésta será la ecuación diferencial a resolver. Entonces, aplicando la transformada de Laplace en ambos lados en (4), se llega a la siguiente ecuación:

$$(S^2 + 160S + 10^4)Q(s) - sq(o) - q'(0) - 160q(0) = \frac{20}{s} \tag{5}$$

Se supone que $q'(0) = 0$, $q'(0) = 0$ e I(0) = 0, donde $Q(s)$ es la transformada de q(t). Entonces la ecuación (5) se reduce a:

$$(S^2 + 160S + 10^4)Q(s) = \frac{20}{s} \tag{6}$$

Despejamos la variable transformada y obtenemos de (6):

$$Q(s) = \frac{20}{s(S^2+160S+10^4)} \tag{7}$$

Utilizando en (7) el desarrollo de fracciones simples:

$$Q(s) = \frac{\frac{1}{500}}{s} - \frac{1}{500}\frac{s+160}{s^2+160s+10^4} \tag{8}$$

$$Q(s) = \frac{1}{500}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+160}{s^2+160s+10^4}\right) \tag{9}$$

$$Q(s) = \frac{1}{500}\left(\frac{1}{s} - \frac{(s+80)+80}{(s+80)^2+60^2}\right) \tag{10}$$

Aplicando la inversa de la transformada en (10) obtenemos:

$$q(t) = \frac{1}{500}(1 - e^{-80t}\cos 60t - 80\sin 60t) \tag{11}$$

Luego la corriente del circuito (I), esta dada por:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{3}e^{-80t}\sin 60t \tag{12}$$

Las ecuaciones (11) y (12) corresponden a la solución del problema, en las que se aplico la transformada de laplace para obtener esta.

IV. CONCLUSIÓN:

En resumen, se puede afirmar que la aplicación de la transformada de laplace es una herramienta muy útil, mecánica, sencilla y simple para la resolución de ejercicios que contengan ecuaciones diferenciales, ya que por otros métodos podría resultar muy compleja la resolución del mismo.

V. REFERENCIAS:

[1] http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Aplicaciones_de_la_transformada_de_laplace, Wikimatematica, [consultada el 21 de Julio de 2012].

[2] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002, pp. 202-206

[3] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 2do. Cuatrimestre 2011, pp.56-63. 2011

[3] http://es.wikipedia.org/, Wikipedia, La enciclopedia libre, [consultada el 21 de Julio de 2012].