# Señales Digitales y Series de Fourier

Perversi Matías

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación*
*Universidad Nacional del Sur Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*matiasperversi@gmail.com*

Diciembre 2011

*Resumen:* Durante la transmisión de información a través de un medio físico se producen una serie de fenómenos de atenuación, ruido, etc. que distorsionan la misma. Para poder realizar esta interpretación frecuencial de la señal transmitida vamos a utilizar una herramienta matemática que se denomina análisis de Fourier.

*Palabras clave:* Fourier, Señales.

## I. INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar con el análisis, es importante conocer algunas definiciones acerca de las señales:

**Señales Digitales**: Una señal digital es una forma de onda muestreada o discreta, pero cada número en la lista puede, tomar solo valores específicos. Su forma característica es ampliamente conocida: la señal básica es una onda cuadrada (pulsos) y las representaciones se realizan en el dominio del tiempo.

Por otra parte, el análisis de Fourier es un concepto básico para entender algunos de los efectos que se producen en la transmisión de datos a través de un medio físico, como por ejemplo distintos tipos de cables. En esta nota de aplicación se detallara el cálculo de la descomposición de una señal digital mediante series de Fourier, además de la interpretación de los efectos que ejerce el medio sobre esa misma señal. Para ello Realizaremos el estudio de esta señal digital en el dominio de la frecuencia mediante el análisis de Fourier.

## II. ANÁLISIS DE FOURIER

A continuación se explican brevemente los fundamentos teóricos de la descomposición en series de Fourier.

La información puede transmitirse por medio de cables al variar alguna de sus propiedades físicas como la tensión o la corriente que circula por él. Al representar el valor de dicha propiedad en función del tiempo, podremos modelar el comportamiento de la señal y analizarla matemáticamente.

A principios del siglo XIX, Fourier demostró que cualquier función que se comporte de forma razonablemente periódica, puede construirse mediante la suma (posiblemente infinita) de funciones seno y coseno.

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen(2\pi nft) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, cos(2\pi nft) \tag{1}$$

Donde f es la inversa del periodo de la señal y la denominamos frecuencia fundamental de la señal $s(t)$. Por otra parte, $a_0$ es una constante a la que llamaremos componente de continua de $s(t)$ y $a_n, b_n$ son las amplitudes de los diferentes armónicos. Estos armónicos son los que nos permiten el estudio en frecuencia de dicha señal periódica. Una señal de datos que tiene una duración finita, puede manejarse suponiendo que aquella se repite una y otra vez:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) sen(2\pi nft) dt \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) cos(2\pi nft) dt \tag{3}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t) dt \tag{4}$$

La amplitud de cada sinusoidal de un armónico n viene marcada por los términos $a_n$ y $b_n$. Estos coeficientes ponderan la contribución de la frecuencia de este armónico en la señal origina $s(t)$.

La potencia o amplitud de un armónico n se calcula como:

$|P_n|=\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2}$ , la energía transmitida a cada frecuencia es proporcional al cuadrado de este valor.

## III. CÁLCULO DE LA SERIE DE FOURIER DE UN CARÁCTER ASCII (BYTE) QUE SE REPITE PERIÓDICAMENTE

Al utilizar un cable para transmitir una señal, la propia señal que se transmite resulta inevitablemente atenuada. Sin embargo, un cable no atenúa a todos los armónicos de manera uniforme, sino que actúa como filtro paso bajo, de forma que los armónicos de menor frecuencia pasan por él sin problema, pero los de frecuencia más alta resultan atenuados o totalmente filtrados.

Supongamos que deseamos transmitir continuamente un mismo byte, en la que un nivel bajo de la señal indica un valor lógico de 0, y un nivel alto de la señal indica un valor lógico de 1.

Si llamamos *T* al periodo del byte, podemos definir formalmente la señal a transmitir $s(t)$ como:

$$s(t)=\begin{cases} bit(0) & para\ t\in\left[0+T_n,\frac{T}{8}+T_n\right[ \\ bit(1) & para\ t\in\left[\frac{T}{8}+T_n,\frac{2T}{8}+T_n\right[ \\ bit(7) & para\ t\in\left[\frac{7T}{8}+T_n,T+T_n\right[ \end{cases} \qquad \forall n\in K \tag{5}$$

Donde bit(*i*) son unas constantes que definen el valor del bit i-ésimo del byte a transmitir.

En este punto vamos a realizar el cálculo de los términos $a_0$, $a_n$ y $b_n$ para la señal $s(t)$ definida anteriormente.

Empezamos con la componente de continua $a_0$,

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$$

Como la función $s(t)$ está definida por partes, podemos realizar la integral por intervalos,

$$a_0=\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{8}} bit(0)dt+\int_{\frac{T}{8}}^{\frac{2T}{8}} bit(1)dt+\ldots+\int_{\frac{7T}{8}}^{T} bit(7)dt\right)$$

Ya hemos comentado que bit(*i*) son constantes, por lo que podemos considerar que,

$$a_0=\frac{1}{T}\left(bit(0)\int_0^{\frac{T}{8}}dt+bit(1)\int_{\frac{T}{8}}^{\frac{2T}{8}}dt+\ldots+bit(7)\int_{\frac{7T}{8}}^{T}dt\right)$$

Resolviendo la sencilla integral tenemos que,

$$a_0=\frac{1}{T}\left(bit(0)\frac{T}{8}+bit(1)\frac{T}{8}+\cdots+bit(7)\frac{T}{8}\right)$$

Finalmente anulamos las *T*, con lo que vemos que la componente de continua es independiente del periodo de la señal, o dicho de otra forma, de la velocidad de transmisión. Podemos expresar finalmente $a_0$ utilizando una sumatoria como,

$$a_0=\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{7} bit(i) \tag{6}$$

Observar que la componente de continua $a_0$ de la señal $s(t)$ es la media matemática de sus bits.

El cálculo de $a_n$ $y$ $b_n$ se realizan de la misma forma, utilizando las fórmulas definidas en la sección II. El resultado es el siguiente,

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\sum_{i=0}^{7}\left[bit(i)\left(sen\left(\frac{n\pi}{4}(i+1)\right) - sen\left(\frac{n\pi}{4}i\right)\right)\right] \tag{7}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\sum_{i=0}^{7}\left[bit(i)\left(cos\left(\frac{n\pi}{4}i\right) - cos\left(\frac{n\pi}{4}(i+1)\right)\right)\right] \tag{8}$$

La explicación genérica expuesta anteriormente se puede ejemplificar mediante la transmisión del carácter ASCII "b", se transmitirá la cadena binaria 01100010. Realizando el análisis de Fourier correspondiente concluimos a los siguientes resultados:

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left(cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{6n\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{7n\pi}{4}\right)\right)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left(sen\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{7n\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{6n\pi}{4}\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{3}{8}$$

De esta manera obtenemos la descomposición de la señal digital $s(t)$ mediante series de Fourier, y así podemos interpretar los efectos que ejerce el medio sobre dicha señal.

## IV. CONCLUSIÓN

Es importante conocer y saber aplicar estas herramientas, ya que son ampliamente utilizados en muchas aplicaciones. Esto nos permite analizar e interpretar conceptos de mucha complejidad de manera simple.

## REFERENCIAS


[1] E. Kreyszig, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 2 - 3ra Edición, 2003.

[2] EcuRed, *Enciclopedia cubana,* [internet], disponible en *http://www.ecured.cu/index.php/ Se%C3%B1ales_anal%C3%B3gicas_y_digitales,* [acceso el 4 de diciembre de 2011].

[3] Universidad Politécnica de Valencia, *Unidad Docente de redes de Computadora,* [Internet] *http://www.redes.upv.es/rds/es/practicas/ Fourier.pdf*, [acceso el 4 de diciembre de 2011].

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en *http://es.wikipedia.org/wiki/ Comparaci% C3%B3n_de_se%C3%B1ales_anal%C3%B3gicas_y_ digitales,* [acceso el 14 de diciembre de 2011].

[5] UniOvi, *Universidad de Oviedo*, [internet], disponible en *http://www.isa.uniovi.es/docencia/ redes/Apuntes/tema2.pdf,* [acceso el 21 de diciembre de 2011].