Producto de Convolución: Aplicaciones.

Percat Fedalto, Fernando Ariel.

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
fernandopercat@gmail.com
Agosto 2015

Resumen: En el siguiente informe, se dará a conocer el producto de convolución: su definición matemática, y algunas de sus aplicaciones; tales como su uso en procesamiento de señales, filtros de imágenes, estadística, probabilidad, audio (reverberaciones), e inclusive, física (superposición).

Palabras clave: Convolución, señal, imagen.

I. INTRODUCCIÓN

El tema que a continuación se explicará, fue elegido con la finalidad de conocer un poco más acerca del producto de convolución. Poder llamar la atención de aquellos interesados en el tema de fotografía, audio o electrónica, dando a conocer muchos de sus usos en situaciones del día a día, tales como filtros de imágenes, popularizados en los últimos años con la aparición de la red social "Instagram", procesamiento de señales en tiempo real como puede ser el que realiza una radio mientras la escuchamos por la mañana, o por qué cuando vamos a misa, no logramos comprender con exactitud lo que dice el sacerdote a través del micrófono.

Muchas de estas curiosidades serán respondidas a continuación, con un trasfondo matemático.

II. CONVOLUCIÓN.

A. ¿Qué es la convolución?

La convolución no es más que un simple operador matemático que transforma dos funciones *f y g* en una tercera que representa la magnitud en la que se superponen *f* y una traslación invertida de *g*. Se denota con el símbolo *, y está definida de la siguiente manera:

$$(f * g)_{(t)} = \int_0^t f\,(u) g(t-u) du; \forall t > 0 \qquad \text{(I)}$$

$$x_n * y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\, y_{n-k} \qquad \text{(II)}$$

Como puede notarse, el producto de convolución de lo continuo (funciones) se calcula mediante una integral, mientras que el producto de convolución de lo discreto (sucesiones), se calcula mediante una serie.

Por lo general, se lo aplica al procesamiento, tanto de señales como de imágenes. Aunque también se lo puede aplicar a espectros de frecuencia (como los términos de la serie compleja de Fourier)

B. Filtros de imágenes.

En esta sección se verán cómo trabajan los filtros de imágenes, qué relación tienen con la convolución y el significado "físico" de esta operación dentro del ámbito de la fotografía.

Como hemos dicho en la introducción, el producto de convolución es muy útil en los filtros de las fotografías. Se puede entender por convolución al producto entre una primera matriz y una segunda matriz llamada "kernel".

El filtro matriz de convolución usa una primera matriz que es la imagen que será tratada. La imagen es una colección bidimensional de píxeles en coordenada rectangular. El kernel usado depende del efecto deseado.

Por lo general, las matrices utilizadas son del tamaño de 5x5 o de 3x3. Veremos el caso de las matrices de 3x3 (que puede ser expresada como una de 5x5 con valor nulo en los bordes)

El filtro examina, sucesivamente, cada píxel de la imagen. Para cada uno de ellos, que lo llamaremos "*píxel inicial*", se hará el producto entre los 8 píxeles circundantes sumado al píxel inicial y los valores del kernel.

Aquí un ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 48 & 42 & 47 \\ 43 & \boxed{44} & 50 \\ 48 & 49 & 42 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A la izquierda, la imagen de la matriz: cada píxel está marcado con su valor. El píxel inicial tiene un borde rojo. El área de acción del kernel tiene un borde verde. En el medio, el kernel, y a la derecha, el resultado de convolución.

Lo que sucede aquí: el filtro lee sucesivamente, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, todos los píxeles del área de acción del kernel. Se multiplica el valor de cada uno de ellos por el valor correspondiente del kernel y se suman los resultados. El píxel inicial llega a 42: (48*0) + (42*1) + (47*0) + (43*0) + (44*0) + (50*0) + (48*0) + (49*0) + (42*0) = 42. (el filtro no trabaja sobre la imagen sino sobre una copia). Como resultado gráfico, el píxel inicial se movió un píxel hacia abajo.

C. Procesamiento de señales.

Una señal arbitraria x(t) puede expresarse como un tren infinito de impulsos. Para ello, dividimos x(t) en "tiras" rectangulares de anchura *ts* y altura x(k,*ts),* Cada "tira" la reemplazamos por un impulso cuya amplitud es el área de la tira.

Ahora bien, sea x(t) una señal arbitraria (como habíamos propuesto anteriormente), y(t) la respuesta del sistema, y h(t) la respuesta al impulso del sistema, podemos ver un método para la convolución discreta entre h[n] y x[x].

h[n] = {2,5,0,4}; x[n] = {4,1,3}; *ts* = ½.

Para resolver este situación, se llevan a cabo 2 pasos:

- Hacemos el "reflejo" de una de ellas, x[-n] = {3,1,4}
- Alineamos las secuencias y las sumamos y desplazamos sucesivamente.

	t =0						
		2	5	0	4		
3	1	4					
0	0	8	0	0	0	=	8

	t = t					
	2	5	0	4		
3	1	4				
0	2	20	0	0	=	22

	t = 2t				
2	5	0	4		
3	1	4			
6	5	0	0	=	11

	t = 3t				
2	5	0	4		
	3	1	4		
0	15	0	16	=	31

	t = 4t					
2	5	0	4			
		3	1	4		
0	0	0	4	0	=	4

		t = 5t					
2	5	0	4				
			3	1	4		
0	0	0	12	0	0	=	12

La convolución discreta será y[n] = {8,22,11,31,4,12}. La convolución numérica es {4,11,11/2, 31/2,2,6}

D. Reverberación convolutiva.

La reverberación convolutiva es un procesamiento digital de audio basado en el cálculo matemático de convolución, permite simular la reverberación de entornos físicos. Utiliza respuestas a impulsos, que son muestras de audio pregrabadas de la respuesta de las reflexiones que genera el entorno, ya sea físico o virtual, a simular posteriormente. Las señales procesadas con este tipo de reverberación sonarán como si la fuente de sonido se encontrase realmente en el entorno simulado.

Una sala se comporta con respecto a una fuente sonora de forma similar a un proceso de convolución. Este proceso matemático convierte dos funciones f y g en una tercera, la cual representa la magnitud en la que se superponen la primera y una versión trasladada e invertida de la segunda. El producto de convolución de de dichas funciones responde a la integral: (I)

El impulso perfecto sería el que tuviese una duración infinitamente corta en el tiempo y nos proporcionase un ancho de banda en frecuencias también infinito. Esto es imposible pero matemáticamente hablando no lo es. Para ello se utiliza la delta de Dirac (δ (t)) que es una distribución cuyo valor es infinito en un determinado punto y cero para los restantes. Esto implica que el ancho de banda será infinito, y que la integral entre más y menos infinito será uno. Al hacerse el producto entre cualquier función y la delta de Dirac el resultado es la función inicial. La función f (t) es lo que llamamos la respuesta al impulso y nos proporciona la información sobre las modificaciones de tiempo y frecuencia que sufriría la señal inicial reproducida en dicha sala.

III. CONCLUSIÓN

Como puede verse, la operación de convolución, tiene muchas aplicaciones del día a día. Conociendo un poco sobre el tema, podremos acercarnos hacia las matemáticas comprendiendo un poco más nuestro alrededor.

REFERENCIAS

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/Convolución, [acceso el 13 de Agosto de 2015].

[2] "Convolución" [internet] disponible en http://www4.tecnun.es/asignaturas/tratamiento%20digital/tema2.pdf [acceso el 10 de agosto de 2015]

[3] "Matriz convolución" [internet] disponible en http://docs.gimp.org/es/plug-in-convmatrix.html

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/Reverberación_convolutiva, [acceso el 13 de Agosto de 2015].

[5] "Reverberación por convolución" [internet] disponible en http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lep/teyssier_r_la/capitulo2.pdf [acceso el 10 de Agosto de 2015]