Aplicación de la Transformada de Laplace en Circuitos Acoplados Magnéticamente

Patricio Owen Sager

Estudiante de Ingeniería Eléctrica
Universidad Nacional del Sur. Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Patricio.owen.sager@gmail.com
Agosto 2012

Resumen: En este informe se expondrá sobre la utilización de la transformada de Laplace, específicamente a circuitos con inductancias mutuas. Se dará una breve introducción, un ejemplo y los pasos a seguir para enfrentar este tipo de problemas en la práctica.

Palabras claves: Transformada, Laplace, circuito, inductancia mutua.

I. INTRODUCCION

La Transformada de Laplace es una herramienta muy usada en la rama de la Ingeniería debido a que permite transformar problemas, ya sea de circuitos u otra índole, en problemas algebraicos. Una vez resuelto este problema algebraico, a priori más fácil de resolver, se calcula a partir de la solución del problema algebraico la correspondiente al del problema de ecuaciones diferenciales.

Todos estos cambios de variables se realizan de un plano sin transformación alguna hacia otro transformado [t→S], en el que se pueden trabajar las ecuaciones siguiendo ciertas reglas.

Ésta transformada está definida de la siguiente manera:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

II. DESARROLLO DE LA NOTA

Al aplicar la transformada de Laplace en elementos básicos que componen un circuito eléctrico se puede llegar a una solución en función del tiempo, o sea para cada instante en el que se desee inspeccionar el estado de éste. Como ya se ha ahondado lo suficiente sobre estos tres dispositivos en trabajos anteriores, en este trabajo se decidió involucrar a un inductor de una forma un tanto distinta.

Ésta forma distinta de la que se mencionó, es la de dos bobinas próximas dispuestas entre sí de forma que sus flujos magnéticos interactúen libremente. A este fenómeno se lo denomina acoplamiento magnético y su definición es la siguiente:

<u>Acoplamiento:</u>

"Existe acoplamiento entre dos o más elementos biterminales cuando la tensión o corriente de uno de los elementos es influenciada por las variables eléctricas de otro."

Dados dos inductores acoplados, a las inductancias de cada elemento particular sin considerar el acoplamiento, L_{11} y L_{22}, se las denomina propias y los flujos asociados a estas inductancias son siempre positivos. En contrapartida, a las inductancias resultantes del acoplamiento, L_{12} y L_{21}, se las denomina mutuas.

Las inductancias mutuas se suponen de igual magnitud, es decir, los efectos del acoplamiento se consideran simétricos por lo que L_{12}=L_{21}=M, llamada simplemente inductancia mutua (imagen 1).

En las ecuaciones que definen este modelo, se considera el signo positivo si el flujo propio $L_{11}i_1$ (t) y el flujo mutuo $L_{12}i_2$(t)=Mi_2 tienen el mismo signo y el negativo en caso que los flujos se opongan.

Esta nueva incorporación no modifica drásticamente el planteo de las ecuaciones diferenciales que se venía haciendo con los tres elementos básicos. Como se puede ver en la imagen 2, ahora se tendrán dos mallas que están relacionadas por la inductancia mutua.

III. EJEMPLO PRACTICO

Se quiere determinar la corriente en la malla 2 (i_2 (t)) sabiendo que los valores de los elementos del circuito son R1=4 Ω, R2=10Ω, L1=2Hy, L2=8Hy y M=2Hy; y que la tensión es v(t)= 28 sen (2t).

El esquema del circuito a analizar es el que se encuentra en la imagen 2.

Para llegar a una solución en función del tiempo, que es lo que pide el problema, primero se deben plantear las ecuaciones diferenciales de cada malla, elemento a elemento.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al primer y segundo circuito respectivamente se obtiene:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v(t) \qquad [1.1]$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \qquad [2.1]$$

Sustituyendo el valor de tensión y los de cada componente se llega a las ecuaciones ya listas para antitransformar:

$$4i_1 + 2\frac{di_1}{dt} + 2\frac{di_2}{dt} = 28\, sen(2t) \qquad [1.2]$$

$$10i_2 + 8\frac{di_2}{dt} + 2\frac{di_1}{dt} = 0 \qquad [2.2]$$

Transformando las ecuaciones temporales anteriormente planteadas, aplicando la transformada de Laplace llegamos a las ecuaciones siguientes:

$$4I_1 + 2(I_1\,\boldsymbol{S}) + 2(I_2\boldsymbol{S}) = \frac{2v_0}{\boldsymbol{S}^2 + 4} \qquad [1.3]$$

$$10I_2 + 8(I_2\,\boldsymbol{S}) + 2(I_1\boldsymbol{S}) = 0 \qquad [2.3]$$

Sacando factor común los términos I_1 en la ecuación 1 y resolviendo para I_2 se obtiene:

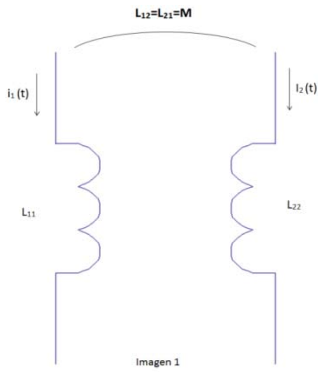

Imagen 1

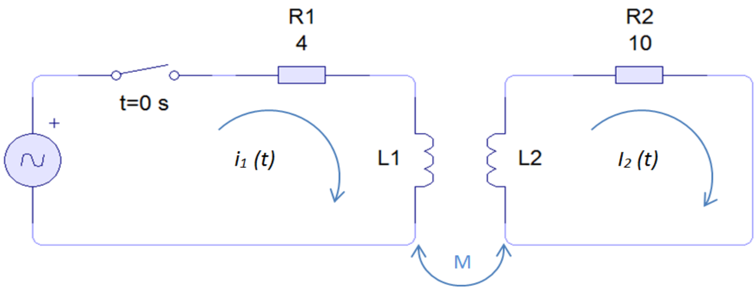

Imagen 2

$$I_2(\boldsymbol{S}) = -\frac{(28)\boldsymbol{S}}{(\boldsymbol{S}^2+4)(3+10\boldsymbol{S})(1+\boldsymbol{S})}$$

Donde ahora se debe aplicar la anti-transformada para encontrar la solución del problema pero en la variable original **t.** Generalmente, al realizar esta operación, se debe acomodar la ecuación resultante de manera que esta tenga una antitransfomrada posible de realizar.

$$I_2(S) = \frac{{}^{7}/_{85}\,(\boldsymbol{S}-26)}{(\boldsymbol{S}^2+4)} - \frac{{}^{45}/_{17}}{(10+3\boldsymbol{S})} + \frac{{}^{4}/_{5}}{(1+\boldsymbol{S})}$$

Llegando a la solución final, la cual está dada por:

$$\boldsymbol{i_2(t) = \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{15}{17}e^{-10t/3} + \frac{7}{85}\cos(2t) - \frac{91}{85}sen(2t)}$$

La cual, si uno observa más detenidamente, a medida que el tiempo transcurre, los dos primeo términos se hacen insignificantes y la corriente de la segunda malla se aproxima a la respuesta senoidal.

PASOS A SEGUIR PARA RESOLVER CIRCUITOS ELECTRICOS CON LAPLACE

Para hallar alguna incógnita del circuito no hacen falta más de cinco pasos básicos a seguir:

Plantear las mallas del circuito aplicando la ley e Kirchhoff utilizando el tiempo como variable.

Transformar las ecuaciones que se obtuvieron, del espacio temporal al transformado.

Resolver o despejar la variable en cuestión.

Llevar la expresión a una forma en la que se pueda aplicar la antitransformada (ya sea por medio de fracciones simples u otro método).

Antitransformar y volver a la variable temporal.

IV. CONCLUSIONES

En este pequeño informe se pudo apreciar el gran potencial que tiene esta transformada en particular, ya sea para la resolución de circuitos de distintos tipos o para cualquier otra área, al trabajar en un campo transformado. Es de gran utilidad tener un manejo fluido de estas herramientas debido a la gran utilidad que representan a lo largo de una carrera de ingeniería.

V. REFERENCIAS

[1]. Artículo de la Universidad de Huelva (www.uhu.es)
[2]. Wikipedia-Enciclopedia Libre
[3]. Notas sobre el análisis de Circuitos y Sistemas
[4]. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería – Glyn James