Transformada Zeta
Aplicación: Sistemas LTI

Palazzani Joaquin M.

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Joacop.1994@gmail.com
Marzo 2015

Resumen: En esta nota de aplicación correspondiente a la asignatura Funciones de Variable Compleja se eligió como tema principal la Transformada Zeta. En los sistemas caracterizados por ecuaciones lineales de diferencias con coeficientes constantes e invariante en el tiempo resultan muy útiles las propiedades de esta transformada.

Palabras clave: Transformada Zeta, ecuaciones lineales de diferencias, sistemas LTI.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada z es importante en el análisis y la representación de los sistemas LTI (Linear Time-Invariant) de tiempo discreto. La misma puede ser empleada en el estudio del procesamiento de señales digitales, como el análisis de circuitos digitales, los sistemas de radar y los sistemas de control de procesos de computadora.

II. DESARROLLO

A. Transformada Zeta

La Transformada Zeta es una generalización de la transformada de Fourier de tiempo discreto. La misma puede hallarse evaluando la transformada en $z = e^{iw}$. Para determinar la respuesta en frecuencia del sistema, esta debe ser evaluada en el círculo unidad.

En cuanto a la región de convergencia (RoC), se define como la región donde la transformada zeta existe. La RoC es una región del plano complejo donde la transformada de una señal tiene una suma finita.

La región de convergencia tiene propiedades que dependen de las características de la señal $x(n)$. Las mismas son:

- La RoC no tiene que contener algún polo, ya que $x(z)$ tiene que ser finita para todas las z para tener convergencia.
- Si $x(n)$ es una secuencia finita, entonces la RoC es todo el plano z, excepto en $|z| = 0$ o $|z| = \infty$.
- Si $x(n)$ es una secuencia de 0 a ∞, entonces la RoC se extiende del último polo al infinito.
- Si $x(n)$ es una secuencia de -∞ a 0, entonces la RoC se extiende desde el polo más cercano en $x(z)$ hacia adentro.
- Si $x(n)$ es una secuencia de -∞ a +∞, la RoC va ser un anillo en el plano z que está restringida en su interior y exterior por un polo.

B. Sistemas LTI

En procesamiento de señales, un sistema LTI es aquel que cumple las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo. Una característica muy importante y útil de este tipo de sistemas reside en que se puede calcular la salida del mismo ante cualquier señal mediante la convolución.

1. Linealidad: Un sistema es lineal si satisface el principio de superposición, que engloba las propiedades de proporcionalidad o escalado y aditividad. Que sea proporcional significa que cuando la entrada de un sistema es multiplicada por un factor, la salida del sistema también será multiplicada por el mismo factor. Por otro lado, que un sistema sea aditivo significa que si la entrada es el resultado de la suma de dos entradas, la salida será la resultante de la suma de las salidas que producirían cada una de esas entradas individualmente.
2. Invariabilidad: Un sistema es invariante con el tiempo si su comportamiento y sus características son fijas. Esto significa que los parámetros del sistema no van cambiando a través del tiempo y que por lo tanto, una misma entrada nos dará el mismo resultado en cualquier momento.

C. Resolución de un sistema LTI

Consideremos el circuito de la figura con

$$x[n] = u[n] \tag{1}$$

La ecuación del circuito es:

$$y[n] = x[n] + ay[n-1] \tag{2}$$

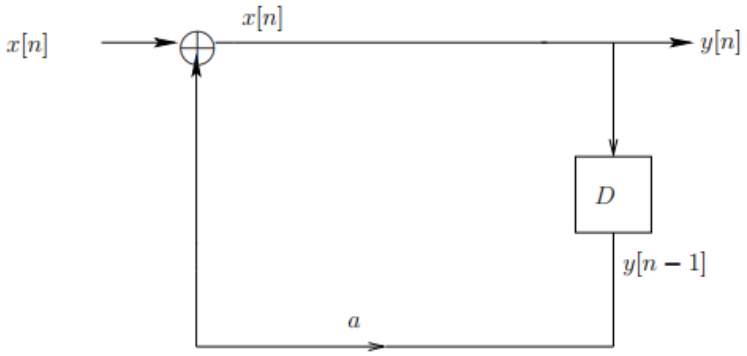

Figura 1: Circuito

Despejamos $x[n]$:

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \tag{3}$$

Ahora aplicando el teorema de convolución, para $a \neq 1$

$$Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}}\frac{1}{1-\frac{a}{z}} \tag{4}$$

A partir de lo cual obtenemos nuestra solución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] u[n-k] \tag{5}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k u[k] u[n-k] = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n \tag{6}$$

Gracias a este ejemplo podemos ver lo mucho que sirve y simplica los cálculos la transformada zeta para la resolución de sistemas LTI.

D. Teoremas, Lemas, demostraciones

Teorema de convolución: si $f(t)$ y $g(t)$ son las transformadas inversas de $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente, la transformada inversa del producto $F(s)G(s)$ es la convolución de $f(t)$ y $g(t)$.

III. Conclusión

La importancia de la Transformada Zeta está en que permite reducir ecuaciones en diferencias con coeficiente constantes a ecuaciones algebraicas lineales. Estas ecuaciones aparecen en innumerables sistemas digitales utilizados innumerables veces en la electrónica.

Referencias

[1] Glyn James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.

[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_LTI, [acceso el 5 de marzo de 2015].

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_Z, [acceso el 10 de marzo de 2015].

[4] Guillermo Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja" 1er. Cuatrimestre 2013.