Transformadas de Laplace en circuitos RLC

Fernando M. Pahúd

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
fernypa@hotmail.com
Octubre 2014

Resumen: En este informe se pretende mostrar como el uso de la transformada de Laplace simplifica la resolución de las ecuaciones diferenciales, en este caso, se utilizará para resolver ecuaciones que modelan circuitos RLC.

Palabras clave: Transformada de Laplace, circuitos RLC, ecuaciones diferenciales.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace tiene un papel fundamental en los sistemas de ingeniería, ya que permite, entre otras cosas, resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

En la resolución de ecuaciones diferenciales que conforman circuitos RLC, dicha ecuación que está en un dominio del tiempo, mediante la transformada de Laplace pasa al dominio en campo s, dominio de Laplace. Una vez resuelto, efectuando las respectivas operaciones algebraicas, se aplica Transformada Inversa de Laplace para obtener la respuesta en el dominio del tiempo.

II. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace toma una función *f(t)* que utiliza al tiempo como variable *t* y la transforma en una función *F(s)* de otra variable *s*. Dicha transformada se define mediante la expresión

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Donde s es una variable completa y e^{-st} es llamado el núcleo de la transformación.

III. CIRCUITOS ELÉCTRICOS RLC

A. *Definición. Leyes.*

Un circuito es una red eléctrica que contiene al menos una trayectoria cerrada. Los circuitos eléctricos pasivos RLC son circuitos lineares construidos con tres elementos básicos: **resistores** (que tiene resistencia R, medida en ohms Ω), **capacitores** (que tiene capacitancia C, medida en farads F) e **inductores** (que tiene inductancia L, medida en henrys H), junto con las variables asociadas **corriente** *i(t)* (medida en amperes A) y **voltaje** *v(t)* (medido en volt V), además, el flujo de corriente en el circuito está relacionado con la **carga** *q(t)* (medida en coulombs C) de la siguiente manera

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

Las relaciones entre el flujo de corriente i(t) y la caída de voltaje v(t) a través de los elementos en el tiempo t son:

Caída de voltaje a través de la resistencia = Ri

Caída de voltaje a través del capacitor = $\frac{1}{C}\int i\, dt = \frac{q}{C}$

El modo en el que interactúan los elementos individuales que forman dicho circuito está determinado por las siguientes leyes de Kirchhoff

Ley 1 La suma algebraica de todas las corrientes que entrar a cualquier unión de un circuito es cero.

Ley 2 La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada en un circuito es cero.

El uso de estas leyes nos lleva a las ecuaciones del circuito, las cuales pueden ser analizadas mediante las técnicas de la transformada de Laplace.

B. Resolución de circuito RLC. Ejemplo de aplicación.

Consideremos el circuito RLC de la figura (1). Antes de cerrar el interruptor en el tiempo t=0, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Sabiendo que las condiciones iniciales del circuito son $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$ y $i(0) = 0$, además de que R = 20 Ω, L = 1H, C = 0.005F y e(t) = 150V, se pretende determinar la carga q(t) en el capacitor y la corriente resultante i(t).

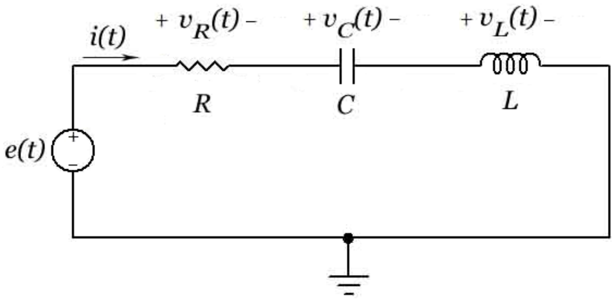

Figura 1 : Circuito RLC en serie

Utilizando la segunda ley de Kirchhoff se obtiene

$$Ri + L\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t)$$

Usando la ecuación (1) se tiene

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

Sustituyendo los valores dados para L, R, C y e(t) queda

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 200q = 150$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros se llega a la ecuación

$$(s^2 + 20s + 200)Q(s) = \frac{150}{s} + sq(0) + \dot{q}(0) + 20q(0)$$

Donde Q(s) es la transformada de Laplace de q(t) y $q(0)$, $\dot{q}(0)$ son las condiciones iniciales las cuales se suponen igual a cero, con lo que la ecuación se reduce a

$$(s^2 + 20s + 200)Q(s) = \frac{150}{s}$$

Despejando obtenemos

$$Q(s) = \frac{150}{s(s^2 + 20s + 200)}$$

Luego, desarrollando en fracciones parciales se obtiene

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{\frac{3}{4}}{s} - \frac{3}{4}\frac{s+20}{(s^2+20s+200)} \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+10)+10}{(s+10)^2+10^2}\right] \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{s} - \left[\frac{s+10}{s^2+10^2}\right]_{s\to s+10}\right] \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso del teorema 1 de traslación queda

$$q(t) = \frac{3}{4}(1 - e^{-10t}\cos(10t) - 10e^{-10t}sen(10t))$$

Luego utilizando la ecuación (1) se obtiene

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{3}{4}(110e^{-10t}\,\mathrm{sen}(10t) - 90e^{-10t}cos(10t))$$

Obteniendo así, las soluciones del problema en el dominio del tiempo.

C. *Teoremas utilizados.*

Teorema 1 *Si f(t) es una función que tiene una transformada de Laplace F(s), con Re(s)>σ, entonces la función* $e^{at}f(t)$ *también tiene una trasformada de Laplace dada por*

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a),\; Re(s) > \sigma_c + Re(a)$$

Prueba.

Una prueba de este teorema se sigue directamente de la definición de transformada de Laplace, ya que

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt$$

Entonces, como

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\,,\; Re(s) > \sigma_c$$

Se puede observar que la integral de arriba está estructurada exactamente como la transformada de Laplace de f(t) excepto que $s - a$ toma el lugar de s, por lo tanto

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \qquad Re(s) > \sigma_c + Re(a)$$

IV. CONCLUSIÓN

En este informe, se puede observar que la transformada de Laplace es una herramienta especialmente útil para resolver ecuaciones complejas de forma sistemática, ya que permite evitar realizar cálculos que resulten muy tediosos. Esta técnica, es sin duda un recurso fundamental para un estudiante de ingeniería debido a que permite optimizar el tiempo utilizado en la resolución de un problema.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, *Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja*. 2do. Cuatrimestre 2014

[2] Glyn James, *matemáticas avanzadas para ingeniería*. Pearson Educación, 2002, cap 2.2.0 – 2.4.1

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Circuito, [acceso el 26 de febrero de 2015].

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace_en_circuitos, [acceso el 26 de febrero de 2015].

[5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Circuito_RLC, [acceso el 26 de febrero de 2015].