Análisis de Fourier y sus aplicaciones en el estudio de señales analógicas.

Pablo Gabriel Dávalos

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
pgdavalos@gmail.com
Febrero 2012

Resumen: Se trata de conocer algunas aplicaciones prácticas del estudio de Funciones de Variable Compleja, y profundizar el conocimiento teórico obtenido, mediante situaciones que se pueden presentar en el trabajo de cualquier ingeniero electrónico. En este caso estudiaremos diferentes adaptaciones de las series de Fourier, específicamente en relación al análisis del contenido de frecuencia de las señales, y la determinación de variaciones de amplitud y fase de las señales sinusoidales cuando estas pasan a través de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Palabras clave: Aplicaciones, Fourier, Frecuencia.

I. INTRODUCCIÓN

El físico y matemático Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) desarrolló una teoría sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes, llamadas en su honor Series de Fourier, enunciándola de la siguiente manera: *"Toda función periódica en el tiempo puede descomponerse en una suma infinita de senos y cosenos, más un valor medio si la función lo posee".*

Una serie de Fourier tiene el siguiente aspecto:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}) \quad (1)$$

o bien se puede escribir en términos complejos de la siguiente forma:

$$f(x) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (2)$$

Donde f es una función periódica con período T=2L, continua a tramos en el intervalo [-L,L].

II. TRABAJANDO CON SEÑALES

Muchos de los sistemas usados en ingeniería pueden modelarse como **Sistemas lineales**, y **Sistemas invariantes en el tiempo.** Estas características son propias de un sistema que satisface:

Entrada	Salida
$x_1(t)$	$y_1(t)$
$x_1(t-t_0)$	$y_1(t-t_0)$
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$ay_1(t) + by_2(t)$

Un dato importante es que, generalmente, cualquier señal que pasa a través de un sistema lineal e invariante en el tiempo se distorsiona, es decir, cambia su forma. La única señal que mantiene su forma y no se distorsiona al pasar por un sistema de este tipo es una señal sinusoidal pura. Este tipo de señales sólo cambian su amplitud y su fase.

Para determinar la amplitud y la fase de cada una de las componentes que tiene una señal periódica se utilizan las series de Fourier, mientras que para trabajar con señales que no son periódicas, se recurre a la Transformada de Fourier, que se define de la siguiente manera:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \tag{3}$$

Si trabajamos con la ecuación (1), la componente de corriente directa (valor promedio de la señal) está dada por $\frac{a_0}{2}$, mientras que la componente de frecuencia f_n esta dada por:

Amplitud: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ Fase $\varphi_n = arctg(\frac{-b_n}{a_n})$

Si trabajamos con la ecuación (2):

Valor promedio: γ_0

Amplitud: $A_n = 2|\gamma_n|$ Fase: $\varphi_n = Arg(\gamma_n)$

A. Señales periódicas

Consideremos una señal cuadrada periódica como la de la figura 1.Si aplicamos los conceptos de Fourier, obtenemos el valor medio, la fase y la frecuencia de la señal, y podemos empezar a sumar las componentes de la serie de señales sinusoidales. A medida que vamos agregando más términos a la sumatoria, la señal senoidal se irá aproximando más a la señal cuadrada original, de manera que si tomamos una sumatoria de infinitos términos, obtendremos nuevamente la señal cuadrada original.
(Figura 2)

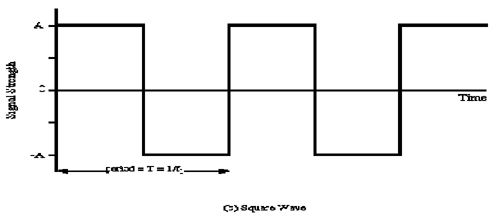

Figura 1: Señal cuadrada, periódica en el tiempo.

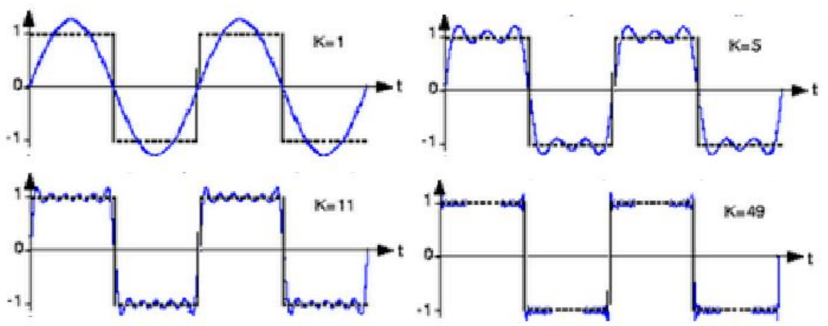

Figura 2: Aproximación de la señal sinusoidal a la original, a medida que se suman términos

B. Señales no periódicas

Si consideramos una señal no periódica $x(t)$, podemos obtener su contenido de frecuencias con la Transformada de Fourier, tal como se la definió en la ecuación (3). Para esto debemos obtener la función de transferencia del sistema, que se defina como

$$H(\omega) = \frac{F\{salida\}}{F\{entrada\}} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{4}$$

La relación entre la amplitud de la señal de entrada y la de salida da una medida de la Ganancia del Sistema, que es una función de la frecuencia de la señal de entrada.

$$\text{Ganancia} = |H(\omega)|$$

La Fase de la señal de salida en relación a la de entrada también depende de la frecuencia, y se defina de la siguiente manera:

$$\text{Cambio de Fase} = \text{Fase de } H(\omega)$$

Tomemos un sistema lineal e invariante en el tiempo, que se modela como:

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 10\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 100y(t) = 100x(t) \tag{5}$$

La función de Transferencia $H(\omega)$ de este sistema es

$$H(\omega) = \frac{100}{100 - \omega^2 + 10\omega j} \tag{6}$$

Las gráficas de cambio de fase y ganancia para este sistema se muestran en la figura 3

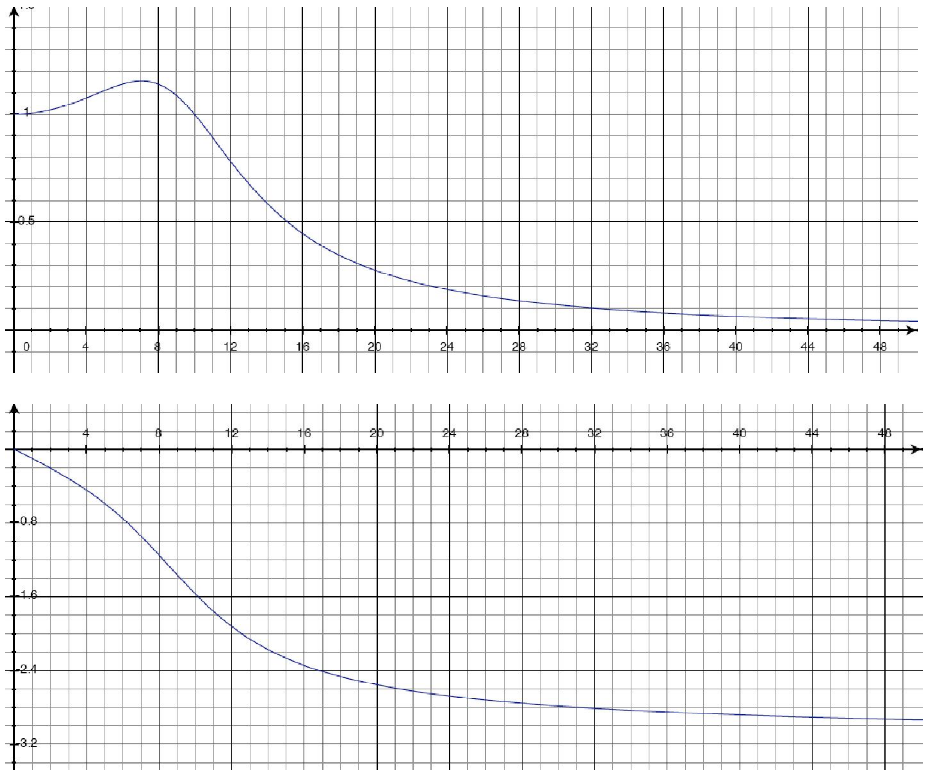

Figura 3: Gráficos de cambio de fase y ganancia del sistema

III. CONCLUSIÓN

El estudio teórico de estas Funciones de Variable Compleja demuestra tener un gran campo de aplicaciones prácticas y una amplia salida laboral si se investigan profunda y cuidadosamente.

El análisis de Fourier funciona en una gran cantidad de sistemas en nuestra vida cotidiana. Se hace presente en sistemas de Comunicaciones, en Ingeniería de Control, en Ingeniería Mecánica, en Campos Electromagnéticos, en Procesamiento de señales de audio, en Procesamiento de imágenes e incluso en el área médica para procesar imágenes generadas por ecogramas, resonancia magnética, tomografías, etc.

Internarse en el campo de las variables complejas abre una infinidad de líneas de investigación y producción de sistemas que pueden ser muy valiosos en un futuro no muy lejano.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de variable compleja“, 2º Cuatrimestre 2011

[2] Jorge A. Olivera R., “Análisis de Fourier y sus aplicaciones”, disponible en www.cienciamatematica.com, [Acceso el 26/20/12]

[3]” La Transformada de Fourier”, disponible en http://corcoles.org/uoc/anmat/es/es41.xml [Acceso el 26/20/12]

[4] Lic Colmenares Wilmer, “Series de Fourier y Taylor”, disponible en http://es.scribd.com/doc/30289839/Series-de-Fourier-y-Taylor [Acceso el 26/20/12]