Transformada de Z:
Sistemas Discretos Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI)

Oyon Camila Lucia

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Camila_oyon@hotmail.com
Agosto 2015

Resumen: En el siguiente informe se detalla el uso de la transformada de Z en la obtención de operaciones entrada-salida, como en el análisis de señales y sistemas en tiempo discreto, para el estudio de sistemas de ecuaciones a diferencia de tipo lineal. La resolución de estos sistemas nos permite comparar valores esperados mediante la teoría con los valores obtenidos de manera experimental. Son sistemas invariantes en el tiempo, es decir no importa el tiempo en que son excitados, siempre responden de la misma manera. La resolución de estos sistemas se facilita con la función Z de transferencia.

Palabras clave: Transformada de Z, LTI, función z de transferencia.

I. INTRODUCCIÓN

En este informe veremos una de las aplicaciones de la transformada de Z y la importancia de la misma en el uso de sistemas LTI, más adelante se explicara en detalle las propiedades de los sistemas LTI, pero como lo indica su nombre son lineales e invariantes en el tiempo.

Para analizar el comportamiento del sistema nos basta con conocer su respuesta a algún tipo de señal básico (por ejemplo impulso) a partir del cual, se pueda construir la respuesta a cualquier señal.

La respuesta a cualquier entrada la podremos obtener sumando y desplazando la respuesta a esa señal básica (acá es donde entra la transformada de Z). Diferentes señales básicas dan lugar a distintos tipos de análisis.

Matemáticamente hablando la respuesta de estas señales la obtendremos con la función de transferencia, que sin la transforma de Z sería muy complejo hallarla.

En conclusión, si obtenemos la función de transferencia H (z) , se pueden obtener las respuestas de todos los impulsos que conforman la entrada, luego sumando dichas respuestas se obtiene la respuesta completa del sistema a la entrada, o sea a la salida.

II. SISTEMA LTI

Son lineales e invariantes en el tiempo. Es decir que cumpla con las siguientes propiedades

Linealidad:

Un sistema es *lineal* (L) si satisface el *principio de superposición*, que engloba las propiedades de proporcionalidad o escalado y aditividad. Que sea proporcional significa que cuando la entrada de un sistema es multiplicada por un factor, la salida del sistema también será multiplicada por el mismo factor. Por otro lado, que un sistema sea aditivo significa que si la entrada es el resultado de la suma de dos entradas, la salida será la resultante de la suma de las salidas que producirían cada una de esas entradas individualmente.

Invariante en el tiempo:

Un sistema es *invariante* con el tiempo si su comportamiento y sus características son fijos. Esto significa que los parámetros del sistema no van cambiando a través del tiempo y que por lo tanto, una misma entrada nos dará el mismo resultado en cualquier momento (ya sea ahora o después). Matemáticamente, un sistema es invariante con el tiempo si un desplazamiento temporal en la entrada x_{n-k} ocasiona un desplazamiento temporal en la salida y_{n-k}.

Esto permite que se pueda representar su entrada en términos de una combinación lineal de señales básicas, entonces así usar la propiedad de superposición para calcular la salida de estos sistemas en términos de sus repuestas a sus señales básicas.

III. LA TRANSFORMADA Z Y LOS SISTEMAS LTI

Un sistema LTI se puede usar para muchas aplicaciones. Si bien los sistemas LTI son ideales y no existen en la naturaleza, siempre va a existir una diferencia en los valores reales de un circuito y el teórico, ya que depende de muchos factores, pero su gran característica es que podemos crear "simulaciones" y así acercarnos a los resultados esperados.

Lo maravilloso de estos sistemas es que con ayuda de las propiedades de la transformada de Z podemos resolver una ecuación de algún tipo de señal y obtener la función de transferencia (ya que esta es la respuesta de la señal).

Consideramos un sistema LTI para el cual la entrada y salida satisfacen una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes.

Podemos partir de una ecuación en diferencias, aplicando la transformada de Z usando propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo, ya que son sistemas discretos.

$$\sum_{K=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Aplicando la propiedad (condiciones iniciales =0) se tiene:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(Z)$$

$$Y(Z) = \frac{B(Z)}{A(Z)} X(Z)$$

Por lo tanto obtenemos H (Z) $H(Z) = \frac{B(Z)}{A(Z)}$

Esta función de transferencia no nos proporciona la región de convergencia. Pero, una restricción aparte como la casualidad o estabilidad del sistema, sirve para especiar la región.

- Un sistema es causal si su salida para cualquier valor de la variable independiente depende únicamente del valor de la entrada correspondiente a dicho valor (y a otros procedentes). También se llama no anticipativo, ya que la salida del sistema no anticipa valores futuros de la entrada.
- Un sistema es estable si la Transformada Z de la respuesta impulsiva tiene todos los polos dentro de la circunferencia de radio unidad (cualquiera que sea su orden de multiplicidad).

La transformada z de tiempo discreto permite reemplazar las operaciones en el dominio del tiempo tales como la convolución y el desplazamiento en el tiempo, con operaciones algebraica. El empleo de la transformada z para convertir descripciones de sistemas a ecuaciones de diferencias algebraicas también es útil en el análisis de sistemas LTI, como conexiones en serie y paralelo.

Podemos mostrar como el uso de la transformada *z* para modelar la relación entre las secuencias de entrada y de salida de un procesador de tiempo discreto para condiciones iniciales nulas.

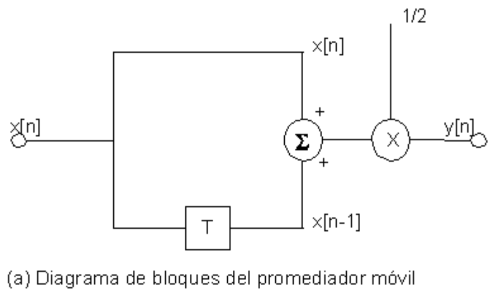

Figura 1.

Considerando el promediador móvil de la figura 1 , se describe por la siguiente ecuación lineal en diferencia finitas

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

Comenzamos reemplazando cada una de las secuencias por su transformada de z, donde la salida y[n] ahora será Y[Z] y la entrada x[n] será X[Z], por lo tanto la expresión es:

$$Y[Z] = \frac{X[Z] + Z^{-1}X[Z]}{2}$$

Podemos ver a ahora como la figura 1 aplicando la transformada se obtendrá en diagrama de la figura 2.

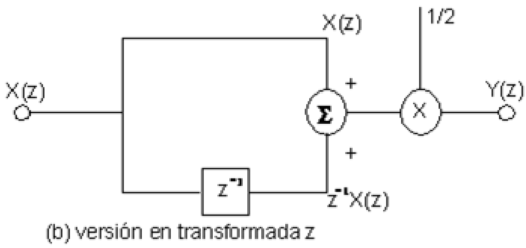

Figura 2.

Desarrollando la expresión , podemos reescribirla de la siguiente manera

$$y(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2} \times x(z)$$

Si recordamos la expresión de H(Z) desarrollada previamente , podemos utilizar la relación

$$H(Z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{z+1}{2z}$$

Donde H(z) es la función de transferencia del promediador, esta función es una propiedad del sistema que caracteriza la forma en que el sitema modifica de entrada para producir la secuencia de salida. Cuando tenemos H(z) es viable encontrar la transformada de Z de la salida para una entrada conocida, esto es posible gracias a la relación utilazada anteriomente, como veremos en la figura 3

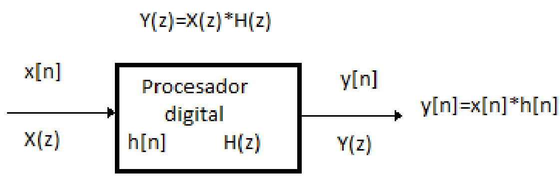

Figura3.

La función de transferencia de un procesador de tiempo discreto lineal es igual a la transformada z de la respuesta a la muestra unitaria del procesador. Es decir, la respuesta a la muestra unitaria h[n] y la función de transferencia H(z) son una pareja de transformadas z:

$$h[n] \leftrightarrow H(z)$$

Podemos tomar un ejemplo de un promediador móvil donde se escribe la función de transferencia del mismo en dos términos en la forma: $H(z) = 0.5 + 0.5 + 0.5 \cdot z^{-1}$ entonces la relación $h[n] \leftrightarrow H(z)$ indica que esta expresión se puede interpretar como la transformada *z* de la secuencia de respuesta a la muestra unitaria *h*[*n*] del procesador, donde: h[n] =0.5, 0.5, 0,0,0, ...

IV. CONCLUSION

Si bien el uso de los sistemas LTI es muy amplio y complejo, su naturaleza permite resolver problemas de diversos campos, tan solo aplicando la transformada de Z y sus propiedades.

La importancia del modelo de la Transformada Z radica en que permite reducir ecuaciones en diferencias o ecuaciones recursivas con coeficiente constantes a ecuaciones algebraicas lineales. Este tipo de ecuaciones provienen de todo tipo de sistemas digitales utilizados para control, procesamiento de imágenes y sonido, etc.
La Transformada z nos permite determinar, en el dominio del tiempo, la ecuación en diferencias o la respuesta al impulso de un sistema LTI, solo con ecuaciones algebraicas.

REFERENCIAS

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, pp 244-264, 2002.
[2] Calandrini, Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja. pp 96-102, 2015.
[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_LTI, [acceso el 30 de mayo de 2015].
[4] Sistemas y señales,[internet],disponible en http://danielprieto-sys-2012.blogspot.com.ar/2012/03/en-esta-ocasion-hablaremos-sobre-los.html.
[5] Procesado Digital de Señales ,[internet], http://www.uv.es/soriae/tema_3_pds.pdf
[6] Señales y sistemas , Escrito por Alan V. Oppenheim,Alan S. Willsky,S. Hamid Nawab
[7] Procesado digital de imagen y sonido, [internet], disponible en http://www.sc.ehu.es/acwarila/PDI/Tema%204/sistemasLTI.pdf
[8] Camacho Garcia Andres. Universidad politécnica de Valencia, [internet], disponible en http://riunet.upv.es/handle/10251/4842
Funcion de transferencia ,[internet],disponible en http://www.ehu.eus/Procesadodesenales/tema4/t83.htm