Transformada de Laplace:
Una herramienta en las finanzas

Oscar A. Uremovich

Estudiante de Ingeniería electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Oscar.uremovich@hotmail.com
Marzo 2015

Resumen: Una de las áreas de la ingeniería es el análisis de inversión de capital. La transformada de Laplace puede usarse como una herramienta para calcular el valor presente de flujos de efectivo, y de esta manera predecir el comportamiento de ciertos aspectos económicos y financieros, mostrándonos la viabilidad de nuestra inversión. El mundo económico generalmente no se representa por funciones continuas, por lo que las funciones de impulso son de gran ayuda para modelar ciertos fenómenos. La transformada de Laplace permite manipular los flujos discontinuos, convirtiéndolos en conjuntos continuos, facilitando la interpretación y resolución de ciertos problemas económicos.

Palabras clave: Transformada de Laplace, flujos de efectivo, economía.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace de una función f tiene una interpretación económica evidente: $\mathcal{L}[\mathrm{f}]_{(s)}$ es el valor presente de un flujo f(t) durante el periodo [0,∞) y con una tasa de descuento igual a s.

Si tomamos a c(t) como una trayectoria de consumo y u(c(t)) la utilidad que se deriva del mismo, entonces: $\mathcal{L}[\mathrm{u(c)}]_{(s)} = \int_0^\infty \mathrm{u}\big(\mathrm{c(t)}\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt}$ es el valor presente de la utilidad acumulada en [0,∞), descontado a una tasa s.

Esta observación fue hecha en 1986 por S. Buser [1], que detectó en esta transformada una herramienta para calcular el valor presente de flujos de efectivo. Hay una variedad de artículos dedicados a otras aplicaciones dentro de finanzas: DeSchepper, Teunen y Goovaerts 1992 [2] y 1994 [3], Pelsser 2000 [4], Denuit 2001 [5] y Bartoszewicz 2000 [6].

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A. *Introducción teórica:*

Recordemos las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace [7]-[8]:

1) $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}]_{(s)} = s\mathcal{L}[f]_{(s)} - f(0)$En donde f es una función diferenciable en [0,∞).
2) $\mathcal{L}[0] = 0$ y $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$ para cualesquiera f y g funciones con a y b ∈ R. (Propiedad de linealidad)
3) La asignación f → F es inyectiva, de manera que puede definirse la transformada de Laplace inversa (de la función F) como $\mathcal{L}^{-1}[F]_{(s)} = f_{(t)}$. Esta transformada inversa posee también la propiedad de linealidad.

Estas tres propiedades son aplicables para resolver problemas económicos de flujos de capitales.

Si consideramos k(t) una trayectoria para el capital, y el capital se deprecia a una tasa δ, entonces la trayectoria de inversión bruta está dada por:

$$\mathrm{I(t)} = \frac{\mathrm{dk(t)}}{\mathrm{dt}} + \delta\mathrm{k(t)} \tag{1}$$

Supongamos que la tasa de descuento es igual a r, por lo tanto tomando la trasformada de Laplace de la inversión y utilizando las propiedades ya mencionadas tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathrm{I}](\mathrm{r}) &= \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{dk}}{\mathrm{dt}}\right]_{(\mathrm{r})} + \delta\mathcal{L}[\mathrm{k}]_{(\mathrm{r})} \\
&= \mathrm{r}\mathcal{L}[\mathrm{k}]_{(\mathrm{r})} - \mathrm{k}_{(0)} + \delta\mathcal{L}[\mathrm{k}]_{(\mathrm{r})} \\
&= (\mathrm{r}+\delta)\mathcal{L}[\mathrm{k}]_{(\mathrm{r})} - \mathrm{k}(0)
\end{aligned}
$$

Esto nos da la relación entre el valor presente de la inversión bruta ($\mathcal{L}[\mathrm{I}]_{(\mathrm{r})}$) y el del capital($\mathcal{L}[\mathrm{k}]_{(\mathrm{r})}$), ambos descontados a la tasa r.

B. Solución a ecuaciones diferenciales [9]

Nos concentraremos ahora en la solución de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} + \delta\mathrm{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{H}(\mathrm{t}) \tag{2}$$

En donde x es una función diferenciable y H(t) es cualquier función cuya transformada de Laplace existe. Si pensamos en x(t) como el acervo de capital al tiempo t, entonces la ecuación (2) es simplemente la ecuación de inversión (1) con H(t) = I(t).

Tomemos la transformada de Laplace de (2) para obtener:

$$\mathcal{L}[\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}]_{(\mathrm{s})} + \delta\mathcal{L}[\mathrm{x}]_{(\mathrm{s})} = \mathcal{L}\mathrm{H}_{(\mathrm{s})}$$

$$\mathrm{s}\mathcal{L}[\mathrm{x}]_{(\mathrm{s})} - \mathrm{x}_{(0)} + \delta\mathcal{L}[\mathrm{x}]_{(\mathrm{s})} = \mathcal{L}\mathrm{H}_{(\mathrm{s})} \tag{3}$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{x}]_{(\mathrm{s})} = \frac{\mathrm{x}_{(0)}}{\mathrm{s}+\delta} + \frac{\mathcal{L}\mathrm{H}_{(\mathrm{s})}}{\mathrm{s}+\delta} \tag{4}$$

Observemos que la transformada de Laplace convierte a la ecuación diferencial de flujos dada por (2) en una ecuación algebraica de acervos representada por (3).

Tomemos ahora la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$de la expresión (4) para obtener

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}_{(\mathrm{t})} &= \mathrm{x}_{(0)}\mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{\mathrm{s}+\delta}]_{(\mathrm{t})} + \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{\mathcal{L}[\mathrm{H}]}{\mathrm{s}+\delta}]_{(\mathrm{t})} \\
&= \mathrm{x}_{(0)}\mathrm{e}^{-\delta\mathrm{t}} + \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{\mathcal{L}[\mathrm{H}]}{\mathrm{s}+\delta}]_{(\mathrm{t})}
\end{aligned} \tag{5}
$$

La ecuación (5) nos proporciona el valor de x(t) en cada instante dado su valor inicial x(0). La forma explícita de la solución depende de la función H(t), el caso más simple es cuando H(t) = H, una constante, de manera que la solución dada por (5) queda como

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}_{(\mathrm{t})} &= \mathrm{x}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{st}} + \mathcal{L}^{-1}[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{s}+\delta}]_{(\mathrm{t})} \\
&= \mathrm{x}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{st}} + \mathrm{H}\mathcal{L}^{-1}\left[-\tfrac{1}{\delta(\mathrm{s}+\delta)} + \tfrac{1}{\delta\mathrm{s}}\right]_{(\mathrm{t})} \\
&= \mathrm{x}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{st}} - \tfrac{\mathrm{H}}{\delta}\mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{(\mathrm{s}+\delta)}]_{(\mathrm{t})} + \tfrac{\mathrm{H}}{\delta}\mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{\mathrm{s}}]_{(\mathrm{t})} \\
&= \mathrm{x}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{st}} - \tfrac{\mathrm{H}}{\delta}\mathrm{e}^{-\delta\mathrm{t}} + \tfrac{\mathrm{H}}{\delta} \\
&= \mathrm{e}^{-\delta\mathrm{t}}(\mathrm{x}(0) - \tfrac{\mathrm{H}}{\delta}) + \tfrac{\mathrm{H}}{\delta}
\end{aligned}
$$

La solución general de (5) puede encontrarse de la siguiente manera. Notemos que si $\mathrm{g}_{(\mathrm{t})} = \mathrm{e}^{-\delta\mathrm{t}}$, entonces se tiene que $\mathcal{L}[\mathrm{g}]_{(\mathrm{s})} = \frac{1}{\mathrm{s}+\delta}$ para todo $\mathrm{s} > -\delta$, con lo cual:

$$\mathrm{x}_{(\mathrm{t})} = \mathrm{x}(0)\mathrm{e}^{-\delta\mathrm{s}} + \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(\mathrm{g})\mathcal{L}(\mathrm{H})]_{(\mathrm{t})}$$

Aplicando producto de convolución en el término de la derecha queda:

$$\mathrm{x}_{(\mathrm{t})} = \mathrm{x}(0)\mathrm{e}^{-\delta\mathrm{s}} + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\delta(\mathrm{t}-\mathrm{r})}\,\mathrm{H}(\mathrm{r})\mathrm{dr}$$

Esta ecuación tiene una interpretación económica inmediata. Para ilustrar esto pensemos en x(t) como el acervo de capital que se deprecia a una tasa δ y en H(t) como la inversión bruta. Entonces nos dice que el acervo de capital en el tiempo t consiste de dos partes: la primera es lo que queda del capital inicial tomando en cuenta la depreciación (representada por el primer término de la ecuación), y la segunda consiste en la inversión acumulada en el periodo [0, t] con su correspondiente depreciación (representada por el segundo término de la ecuación).

C. La función Delta Dirac y los impulsos de inversión

La función delta de Dirac puede aplicarse a un sinnúmero de problemas para los cuales queremos modelar un impulso exógeno. Tomemos, por ejemplo, la siguiente ecuación de inversión:

$$\frac{dk}{dt} = \delta_0$$

Es decir, la inversión es nula excepto en el instante t = a para el cual es “infinitamente grande”, o bien hay un “impulso” de inversión en t = a. La solución a esta ecuación está dada por (5) con δ = 0 y por lo tanto:

$$k(t) = k_{(0)}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}]_{(t)} + \mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-as}}{s}]_{(t)}$$

$$k(t) = k_{(0)} + u_a(t)$$

La figura muestra el comportamiento de k(t) : en el instante t = a el capital pasa discretamente a tomar el valor k(0)+1.

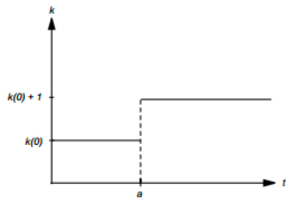

Figura 1

El ejemplo anterior puede generalizarse tomando la siguiente ecuación:

$$\frac{dk}{dt} = \sum_{n=1}^{T} \delta_n\,(t)$$

Es decir, los impulsos de inversión se realizan en t = 1, 2,..., T. La ecuación se resuelve igual que arriba obteniéndose $k(t) = k(0) + \sum_{n=1}^{T} u_n\,(t)$

La figura 2 muestra el comportamiento de k(t) para este caso. Podemos también tomar en cuenta la depreciación del capital y considerar la ecuación

$$\frac{dk}{dt} + \delta k = \delta_a(t)$$

Esta ecuación es de la forma (2) y su solución está dada nuevamente por (5) como sigue:

$$k_{(t)} = k(0)\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+\delta)}]_{(t)} + \mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-as}}{s+\delta}]_{(t)}$$

$$= k(0)e^{-\delta t} + u_a(t)e^{-\delta(t-a)}$$

El comportamiento de k(t) cuando k(0) = 1, δ = 0.3 y a = 4 se muestra en la figura 3.

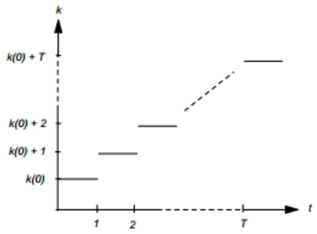

Figura 2: el capital cambia discretamente en t=1,2,3..,T.

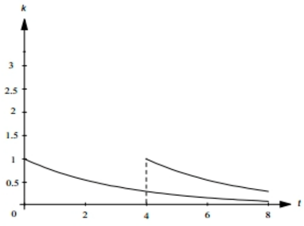

Figura 3: Trayectoria de $k_{(t)} = e^{0.3} + u_4(t)e^{-0.3(t-4)}$

Los ejemplos anteriores podrían adaptarse fácilmente al caso de la inversión en un activo con un flujo de dividendos D(t) y una tasa libre de riesgo r. La ecuación para el valor x(t) del activo está dada por:

$$\frac{dx}{dt} + D_{(t)} = rx_{(t)}$$

Es la ecuación (2) con δ = −r y H(t) = −D(t). Esta ecuación puede interpretarse como una condición de no arbitraje: en cada instante es equivalente invertir la cantidad x(t) a una tasa r, (digamos comprando Cetes) obteniendo una cantidad rx(t), o bien realizar la inversión, obteniendo los dividendos D(t) más el cambio en el valor del activo dx(t)dt . Los dividendos pueden modelarse como funciones de impulso. Ésta es, claramente, una mejor aproximación de la realidad que el pensarlos como funciones continuas.

III. CONCLUSIÓN

En este informe realizamos una breve exposición de la transformada de Laplace y su interpretación económica. En general, podemos decir que los economistas ignoran la existencia de esta transformada y los usuarios principales de ella desconocen los conceptos económicos. Esta situación ha mantenido a la transformada alejada del economista profesional, siendo utilizada únicamente como una herramienta para la resolución de algunas ecuaciones diferenciales en finanzas.

Este trabajo nos muestra que la modelación económica da un nuevo sentido a técnicas matemáticas ya conocidas; podemos ver que la economía no es una simple usuaria de las matemáticas sino que las enriquece, proporcionando interpretaciones dentro de un ámbito distinto al de las ciencias básicas.

REFERENCIAS

[1] S.A. Buser, “Laplace Transforms as Present Value Rules”, Journal of Finance, 44 (1): 243-247, 1986.
[2] A.A. DeSchepper, M. Teunen y M. Goovaerts, “The Laplace Transform of Annuities Certain with Exponential Time Distribution”, Insurance:Mathematics and Economics”, 11: 291-294, 1992.
[3] A.A. DeSchepper, M. Teunen y M. Goovaerts, “An Analytical Inversion of a Laplace Transform Related to Annuities Certain”, Insurance: Mathematics and Economics”, 14: 33-37, 1994.
[4] A. Pelsser, “*Pricing Double Barrier Options using Laplace Transforms*”, Finance Stock., 4 (1): 95-104, 2000.

[5] M. Denuit, “Laplace Transform Ordering of Actuarial Quantities”, Insurance: Mathematics and Economics, 29: 83-102, 2001.
[6] J. Bartoszewicz, “Stochastic Orders Based on the Laplace Transform and Infinitely Divisible Distributions”, Statist. Probab. Lett., 50 (2): 121-129, 2000.
[7] G. Calandrini, “*Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”,* 2do. Cuatrimestre 2014.
[8] G. James, “*Matemáticas Avanzadas para Ingeniería”*, Pearson Educación, 2002.
[9] C. Edwards y D. Penney, “*Ecuaciones Diferenciales”*, Pearson, 2a ed., 2001.