Resolución de Circuitos RLC mediante la Transformada de Laplace

Mario O. Molina

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
oscar_11_638@hotmail.com
Agosto 2012

Resumen: En este informe se detallará una de las herramientas más utilizadas para el análisis y resolución de circuitos eléctricos. Se mostrará como la Transformada de Laplace es aplicada para resolver circuitos RLC.

Palabras clave: Transformada de Laplace, circuitos RLC, mallas.

I. INTRODUCCIÓN

Definimos la Transformada de Laplace de una función $f(\mathrm{t})$ mediante la expresión

$$\mathcal{L}\{ f(\mathrm{t}) \} = \mathrm{F(s)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} . f(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}$$

donde s es una variable compleja y e^{-st} es llamado el núcleo de la transformación.

El símbolo $\mathcal{L}$ denota el operador Transformada de Laplace, cuando opera en una función $f(\mathrm{t})$ la transforma en una función F(s) de variable compleja s. Decimos que el operador transforma la función $f(\mathrm{t})$ en el dominio t (llamado Dominio de Tiempo) en la función F(s) en el dominio s (llamado Dominio de Frecuencia).

La Transformada de Laplace provee un método para resolver ecuaciones diferenciales (lineales con coeficientes constantes) y los correspondientes problemas con condiciones iniciales o valores en la frontera. El proceso de resolución consta de tres pasos principales:

1. El problema complejo de resolver una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales se transforma, utilizando la propiedad de las derivadas, en un problema más sencillo de resolver, a una ecuación algebraica o un sistema algebraico lineal.
2. Se resuelve haciendo operaciones algebraicas.
3. La solución del sistema algebraico se transforma en sentido inverso para obtener la solución del problema dado.

II. CIRCUITOS RLC

Un circuito RLC es un circuito lineal que contiene una resistencia eléctrica, una bobina (inductancia) y un condensador (capacidad).

Existen dos tipos de circuitos RLC, en serie o en paralelo, según la interconexión de los tres tipos de componentes. El comportamiento de estos tipos de circuitos se describe por una ecuación diferencial de segundo orden (en donde los circuitos RC o RL se comportan como circuitos de primer orden).

A continuación, definiremos los elementos que componen un circuito RLC:

A. *Resistencia Eléctrica*

Es una medida de su oposición al paso de la corriente.

La resistencia de cualquier objeto depende únicamente de su geometría y de su resistividad, por geometría se entiende a la longitud y el área del objeto mientras que la resistividad es un parámetro que depende del material del objeto y de la temperatura a la cual se encuentra sometido. Esto significa que, dada una temperatura y un material, la resistencia es un valor que se mantendrá constante. Además, de acuerdo con la Ley de Ohm, la resistencia de un material puede definirse como la razón entre la caída la tensión y la corriente en dicha resistencia, así: R= V/I donde V es la diferencia de potencial en voltios e I es la intensidad de corriente en amperios. Su unidad de medición es el Ohm (Ω).

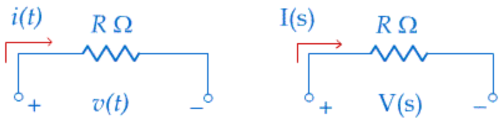

Figura 1: Circuito resistivo

B. Bobina

Una bobina o inductor es un componente pasivo de un circuito eléctrico que, debido al fenómeno de la autoinducción, almacena energía en forma de campo magnético. Su unidad de medición es el Henrys (H).

C. Condensador

Es un dispositivo pasivo, capaz de almacenar energía sustentando un campo eléctrico. Está formado por un par de superficies conductoras, generalmente en forma de láminas o placas. Cuando están sometidas a una diferencia de potencial, adquieren una determinada carga eléctrica, positiva en una de ellas y negativa en la otra, siendo nula la variación de carga total. Su unidad de medición es el Faradio (F).

III. TRANSFORMADA DE LAPLACE EN CIRCUITOS ELÈCTRICOS

En primer lugar, se detallará como la Transformada está asociada a cada parámetro o componente eléctrica de un circuito:

A. El parámetro resistivo

La Transformada en un circuito meramente resistivo, no tiene efecto sino en las funciones de voltaje y corriente:

$$v(t) = Ri(t)$$

Cuya transformada es:

$$V(s) = RI(s)$$

Estos resultados se pueden ver en la figura 1.

B. El parámetro inductivo

Observando la figura 2, para una inductancia L en Henrys, que posee una corriente inicial de $i(0+)$ en dirección de la corriente $i(t)$, se transforma en el dominio de s como una impedancia sL en ohmios, en serie con una fuente de voltaje cuyo valor en s es $Li(t)$ y que va en la dirección de la corriente I(s)

La ecuación que describe el comportamiento del inductor en el dominio del tiempo es:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Cuya respectiva transformada es:

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^{+})$$

C. El parámetro capacitivo

La figura muestra una capacitancia en el dominio del tiempo. En el dominio de s, ésta se transforma en una impedancia y una fuente de voltaje en serie oponiéndose a la corriente $i(t)$, cuyos valores se observan en la figura 3.

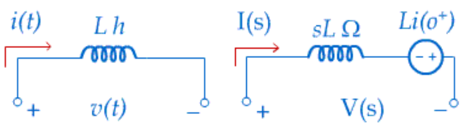

Figura 2: Circuito inductivo

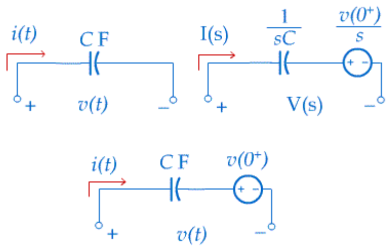

Figura 3: Circuito capacitivo

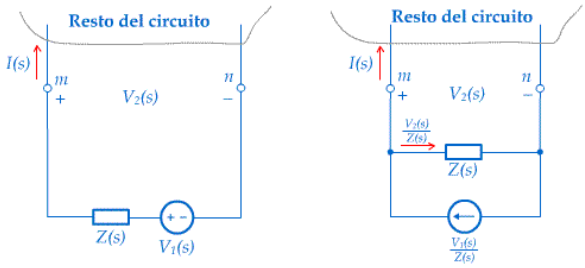

Figura 4: Fuentes

En el dominio del tiempo se tiene:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Transformamos esta ecuación, y obtenemos:

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{\mathrm{v}(0^{+})}{\mathrm{s}}$$

D. Fuentes

En cuanto a las fuentes, la transformada depende de la función que caracterice a dicha fuente.

En la figura 4 se cumple:

$$Z(s)I(s) = V_1 - V_2$$

Despejamos I(s):

$$I(s) = \frac{V_1}{Z(s)} + \frac{V_2}{Z(s)}$$

Resultado que nos conduce a la segunda figura. Estas transformaciones son bidireccionales, es decir, si tenemos una fuente de corriente en paralelo con una impedancia se convertirán en una fuente de voltaje en serie con la impedancia, y viceversa.

IV. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Dado el circuito de la figura 5.1, con las siguientes condiciones iniciales:

$$i_l(0^{+}) = 1\,A \qquad v_c(0^{+}) = 3 \tag{1}$$

Encuentre i(t), utilizando la transformada de Laplace.

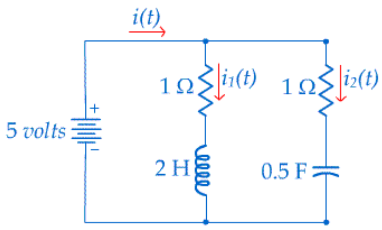

Figura 5.1: Circuito RLC

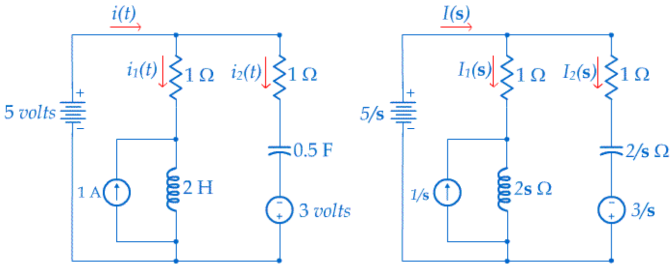

Figura 5.2: Circuito RLC

Como primer paso, incluimos las condiciones iniciales en el circuito del dominio del tiempo, y luego transformamos todo el circuito al dominio de la frecuencia, ver figura 5.2.

La ecuación principal para resolver el problema, es:

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) \tag{2}$$

Ahora planteamos dos ecuaciones de malla, teniendo en cuenta que la segunda ecuación corresponde a la malla exterior del circuito:

$$I_1(s) + 2s\left[I_1(s) + \tfrac{1}{s}\right] = \tfrac{5}{s} \tag{3}$$

$$\left(1 + \tfrac{2}{s}\right) I_2(s) = \tfrac{8}{s} \tag{4}$$

Despejamos las ecuaciones (3) y (4):

$$I_1(s) = \frac{-s+\frac{5}{2}}{s(s+\frac{1}{2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+\frac{1}{2})} \tag{5}$$

$$I_2(s) = \frac{8}{s+2} \tag{6}$$

Hallamos los coeficientes de (5):

$$.A = \lim_{s\to 0}\left(s.\frac{-s+\frac{5}{2}}{s(s+\frac{1}{2})}\right) = 5 \qquad .B = \lim_{s\to -\frac{1}{2}} \left[(s+\tfrac{1}{2}).\frac{-s+\frac{5}{2}}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)}\right] = -6 \tag{7}$$

Y reemplazando (5) y (6) en la ecuación principal (2) obtenemos:

$$I(s) = \left(\frac{5}{s} + \frac{-6}{\left(s+\frac{1}{2}\right)}\right) + \frac{8}{s+2} \tag{9}$$

Esta ecuación podemos convertirla directamente al dominio del tiempo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = i(t) = 5 - 6e^{-\frac{1}{2}t} + 8e^{-2t} \tag{10}$$

V. CONCLUSIÓN

Se puede observar como la Transformada es de gran utilidad para resolver circuitos de todo tipo. El conocimiento y la utilización de esta herramienta son fundamentales para los estudiantes en Ingeniería, como así también, para saber afrontar las materias por venir.

REFERENCIA

[1] Glyn James, ¨*Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*¨, segunda edición, Pearson Educación, 2002. pp.99-100
[2] Guillermo Calandrini, ¨*Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variables Complejas*¨ 1er. Cuatrimestre 2012. pp.63-64
[3] http://virtual.unal.edu.co/cursos/ingeniería/2001603/lecciones/cap10/cap10lec6/cap10lec6.htm. [acceso el 7 de agosto de 2012]
[4] Wikipedia, La enciclopedia libre, Circuitos RLC. [acceso el 7 de agosto de 2012]