Aplicación de funciones de variable compleja en circuitos eléctricos: fasores

Ocampo Matias

Estudiante de Ingeniería Eléctrica

Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina

Matu_auri92@hotmail.com

Marzo 2014

Resumen: se va a comenzar con la definición de una señal sinusoidal. Luego se explicará lo que es un fasor, para qué se utiliza y cómo se relaciona con la función sinusoidal. Se definirá el término impedancia y los tipos de impedancias. Y por último se resolverá un circuito resistencia-inductancia en serie, para dejar en claro cómo se trabaja con fasores en circuitos eléctricos.

I. INTRODUCCIÓN

El fasor es un número complejo que se utiliza principalmente para la resolución de problemas de circuitos eléctricos excitados por fuentes senoidales (fuentes de corriente alterna). Permite resolver circuitos eléctricos de forma ágil, lo que no se lograría si se utilizara las funciones seno y coseno. También permite ver fácilmente en el plano complejo el comportamiento de las corrientes y tensiones en el circuito eléctrico.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

Definición de una función sinusoidal

Una sinusoide u oscilación sinusoidal (ver figura 1), es una señal periódica que está definida como una función de la forma:

$$y = r \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

- y es la magnitud que varía (oscila) con el tiempo
- φ es una constante conocida como el ángulo de fase de la sinusoide
- r es una constante conocida como la amplitud de la sinusoide. Es el valor de pico de la función sinusoidal.
- ω es la frecuencia angular dada por $\omega = 2\pi f$ donde f es la frecuencia.
- t es el tiempo.

Definición de fasor

Es un número complejo que permite representar la amplitud y la fase de una sinusoide. Su representación gráfica es un vector que gira en torno al origen a una velocidad constante ω (ver figura 1).

$$y = r\, e^{i\varphi}$$

- r es la amplitud de la sinusoide o valor pico.

- φ es el ángulo de fase de la sinusoide.

El fasor se puede representar de tres maneras:

$$z = x + jy \qquad \textit{Forma rectangular}$$
$$z = r\angle\varphi \qquad \textit{Forma polar}$$
$$z = re^{j\varphi} \qquad \textit{Forma exponencial}$$

La relación entre la forma rectangular y polar se estudió en el cursado de la materia.

En conclusión, podemos expresar cualquier señal sinusoidal como la parte real o imaginaria de un fasor de módulo igual a la amplitud máxima de la señal, de argumento igual a su fase inicial, y que gira a una velocidad angular igual a la frecuencia de la señal.

El fasor se relaciona con las funciones senoidales a través de la siguiente expresión:

$$Y(t) = r\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\,[r\,e^{i\varphi}]$$

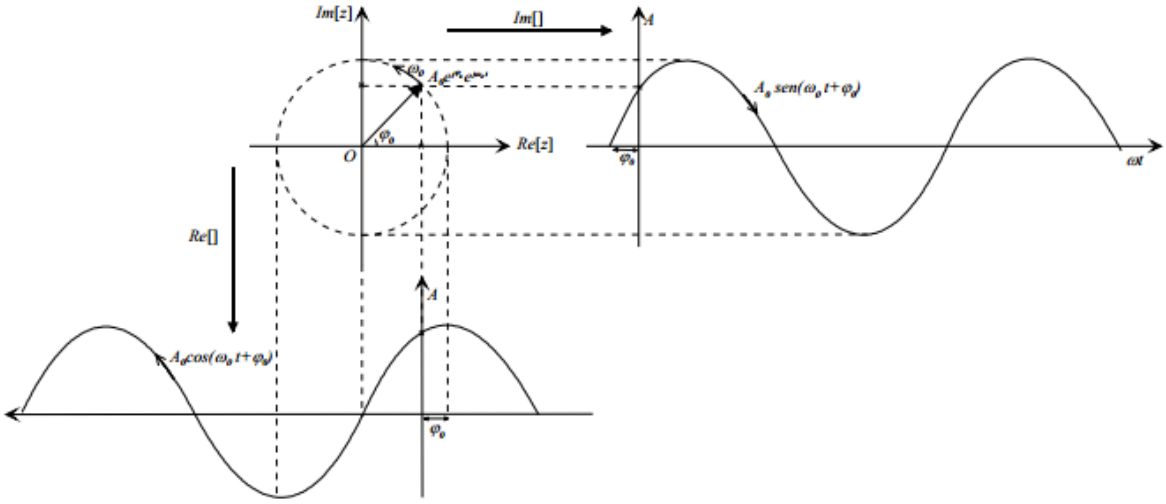

Figura 1: Equivalencia entre funciones sinusoidales y números complejos

Que se represente por medio de fasores a una función senoidal de senos o cosenos es indiferente. Pero al momento de resolver un circuito eléctrico, si las tensiones y corrientes se dan en su representación temporal, todas deben estar expresadas en senos o cosenos, y luego convertirlas a su forma fasorial. Para pasar de la funcion seno a coseno, o viceversa, se pueden utilizar igualdades trigonométricas. Acá algunas:

-sen ωt = cos (ωt + 90°)

+sen ωt = cos (ωt – 90°)

±cos ωt = sen (ωt ± 90°)

Suma y multiplicación de fasores

La suma de señales sinusoidales de igual frecuencia se puede llevar a cabo sumando sus fasores. Dicho de otro modo, la operación puede realizarse en el dominio fasorial con mayor facilidad que en el dominio temporal. Lo mismo sucede con la multiplicación de señales.

La suma se lleva a cabo en la forma rectangular, y la multiplicación en la forma polar o exponencial (como se trabajó en el curso con números complejos).

Tener en cuenta que al sumar y multiplicar fasores, el resultado va a ser correcto solo si trabajan a la misma frecuencia. Es un error operar entre fasores que tienen frecuencias distintas.

La figura 2 muestra el proceso de obtención de la señal suma. En ella es inmediato comprobar que para sumar dos señales sinusoidales es imprescindible tener en cuenta tanto sus amplitudes como sus fases.

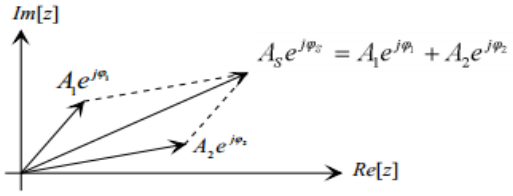

Figura 2: diagrama fasorial: representación gráfica de la suma de dos fasores.

Resolver un circuito eléctrico

Para resolver un circuito eléctrico utilizando fasores, se debe estudiar el significado de impedancia.

La impedancia (Z) es la medida de oposición que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica un voltaje. La impedancia extiende el concepto de resistencia a los circuitos de corriente alterna (CA), y posee tanto magnitud y fase, a diferencia de la resistencia, que sólo tiene magnitud.

Sea un circuito alimentado por una corriente sinusoidal $I_0\cos(\omega t)$. Si el voltaje a sus extremos es $V_0\cos(\omega t + \phi)$ la impedancia del circuito es un número complejo

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} e^{i\varphi} = \frac{V_0}{I_0} (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = R + i X$$

R es la parte resistiva o real de la impedancia y X es la parte reactiva o imaginaria de la impedancia. Básicamente hay dos clases o tipos de reactancias:

- Reactancia inductiva o X_L: Debida a la existencia de inductores.
- Reactancia capacitiva o X_C: Debida a la existencia de capacitores.

La impedancia de una resistencia ideal, solo contiene una componente real: $Z_R = R$

En este caso, el voltaje y corriente son proporcionales y están en fase (tienen la misma fase).

La impedancia en una inductancia ideal o en un condensador ideal tiene una componente puramente imaginaria:

La impedancia en una inductancia se incrementa con la frecuencia; $Z_L = i\omega L$

La impedancia de un capacitor decrece cuando la frecuencia crece; $Z_C = i\omega C$

Resolución de un circuito RL serie utilizando fasores

En el diagrama (figura 3) tenemos un generador sinusoidal $V = 10\cos(\omega t)$ de 10 volts de amplitud y de una frecuencia de 10 kHz. En serie hay una inductancia de 10 mH y una resistencia de 1,2 kΩ. Calculemos la corriente I que circula en el circuito:

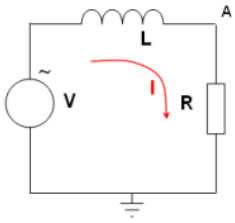

Figura 3: una inductancia y una resistencia en serie alimentadas por un generador sinusoidal

El módulo de la corriente es:

La fase de la corriente es el argumento del número complejo 0,00654 – i 0,003424 A:

La corriente está en retardo de fase con respecto a la fase del generador. Eso es lógico, ya que el circuito es inductivo.

III. CONCLUSIÓN

Al resolver un circuito eléctrico utilizando fasores se puede concluir que transformar una compleja función sinusoidal a su forma fasorial disminuye considerablemente la dificultad de cálculo. La visualización de fasores en el plano complejo, sin dudas, es una ventaja para ver el comportamiento de las corrientes y voltajes sobre cada uno de los componentes del circuito, contra la visualización de las misma en el plano temporal de la función senoidal.

Referencias

[1] http://arantxa.ii.uam.es/

[2] www.wikipedia.com

[3] http://delibes.tel.uva.es