Representación de Magnitudes Eléctricas en el Plano Complejo con el Uso de Fasores

Nicolás Elorza

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
nicoe_91@hotmail.com
Marzo 2011

Resumen: En este informe se mencionara una aplicación a la Ingeniería por parte de las Funciones de Variable Compleja. En primera instancia se realizara una descripción de los fasores y su representación en el plano. En segundo lugar se relacionara el concepto de impedancia con los ya mencionados fasores. Luego se mostrara como se relacionan las magnitudes eléctricas de resistencia, inductancia y capacitancia con la variable compleja. Por ultimo se ilustrara con la resolución de un circuito RLC mediante el calculo, y su solución utilizando fasores y expresiones algebraicas.

Palabras clave: fasores, ondas, frecuencia.

I. INTRODUCCION

En este caso se plantearan las ventajas del uso de variables complejas junto a la representación en el plano complejo de algunas magnitudes eléctricas presentes en cualquier circuito básico eléctrico. Sera mencionada una nueva forma de representar tales magnitudes y su relación con las variables en función del tiempo tal como se puede apreciar en cualquier curso básico de calculo. Se expondrá la resolución de un circuito de baja dificultad para exponer una resolución analítica mediante el uso del calculo y se realizara una comparación a una misma solución, pero utilizando solamente expresiones algebraicas, derivadas del uso de variables complejas. Para la correcta comprensión de este texto es aconsejable poseer conocimientos básicos de circuitos eléctricos.

II. CIRCUITOS CON EXCITACIÓN SINUSOIDAL

Cuando se conecta un circuito RLC a una fuente de tensión variable (o no) se aprecian dos intervalos de tiempo.

Primero se sucede un estado no estacionario, donde las variaciones de corriente son abruptas y difíciles de medir, después el sistema se estabiliza y se produce el estado estacionario. En esta etapa, aunque la corriente/tensión pueden ser variables, se pueden representar (por lo menos de forma ideal) como funciones dependientes del tiempo.

Si la fuente de tensión es sinusoidal, el circuito tendrá una respuesta de la misma frecuencia una vez alcanzado el estado estacionario.

Entonces el flujo de corriente se puede representar como:

$$i(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{1}$$

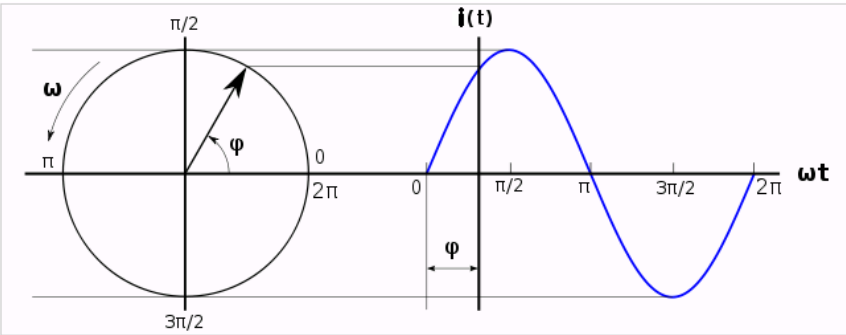

Figura 1: Representación fasorial de una onda sinusoidal

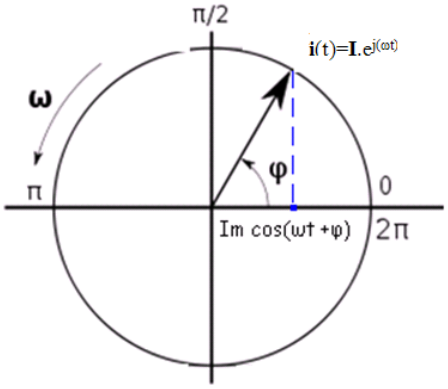

Figura 2: Interpretación de la Representación Fasorial

Siendo ω la frecuencia de la fuente, A la amplitud de la onda, φ_1 el desfasaje con respecto al origen en el t=0 e Im el radio de la circunferencia mostrada en la figura (del mismo modulo que el de A).

De forma fasorial la expresión es **I**=Im||φ

El fasor **I** representa la amplitud y el desfasaje de la onda sinusoidal de manera practica, dado que el modulo de **I** (Im) representa la amplitud máxima de la onda y φ_1 nos indica el desfasaje de la misma. Puede observarse también que la frecuencia de la onda no es indicada por la representación fasorial, esto se debe a que el uso de los mismos solo es posible si los elementos del circuito trabajan bajo la misma frecuencia, es decir, si se introduce una nueva fuente, esta puede estar desfasada respecto a la primer fuente, pero para poder representar su comportamiento con el uso de fasores, debe trabajar bajo la misma frecuencia que la fuente original.

Una de las ventajas que nos proporciona el uso de fasores es su maleabilidad algebraica, dado que en el caso de que deseáramos sumar dos ondas, solo tendríamos que sumar dos números complejos, por lo que con la adición de sus formas binómicas tendremos la suma resuelta y en el caso de querer multiplicar ambas ondas, solo basta multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos.

A. Representación Fasorial

Veamos esta representación con más detalle utilizando la identidad de Euler, como

$$i(t)=Im\cos(\omega+\varphi_1) \quad (2)$$

$$\mathbf{i}(t)=\mathbf{I}.e^{j(\omega t)}=Im.e^{j(\omega t+\varphi 1)} \quad (3)$$

luego, con la identidad de Eule, de (2) y (3) se tiene:

$$i(t)=Im\cos(\omega+\varphi_1)=Re(Im\, e^{j(\omega t+\varphi 1)})=Re(\mathbf{I}\, e^{(j\omega t)}) \quad (4)$$

De esta forma se obtiene un fasor rotante[1], al cual si se lo proyecta sobre el eje real, indica la intensidad que circula en el tiempo t="t_0"

De manera similar se puede reemplazar la expresión (4) para adecuarla al calculo de tensión instantánea.

B. Impedancia

Si la "respuesta" de un circuito (corriente eléctrica) tiene componentes complejas, entonces la causa (tensión) del mismo también debe tenerlas.

Cuando la tensión toma valores continuos, la relación entre estas dos magnitudes (Corriente /Tensión) esta dada por la resistencia total del circuito. Pero si la tensión toma valores sinusoidales, el concepto de resistencia necesita ser ampliado y utilizar el de impedancia (**Z**).

En este caso

$$Z=V/I$$

Entonces si **V** e **I** son variables complejas se puede decir que

$$Vm=|\mathbf{Z}|.Im \quad (5)$$

$$\varphi_v=\varphi_z+\varphi_i$$

De esta manera se obtienen los desfasajes e intensidad de manera sencilla:

Solo resta conocer como se relacionan los elementos pasivos de un circuito con el concepto de impedancia, pero antes veremos como se comportan cuando se utiliza el dominio del tiempo para el calculo de soluciones

Para resistores:

$$V=R.i \quad (6)$$

Para inductores:

$$V=L\ d(i)/dt \quad (7)$$

Para capacitores:

$$dV/dt.C=I \quad (8)$$

De esta manera un circuito como el de la figura 3, tiene una resolución que puede expresarse como solución de la ecuación:

$$V(t) = L\frac{d}{dt}i + Ri + \frac{1}{C}\int_{i0}^{t} i(d)du$$

Derivando miembro a miembro se genera una ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$\frac{d}{dt}V = L\frac{d^2}{dt^2} + R\frac{d}{dt}i + \frac{1}{C}i$$

La cual claramente no tiene una solución “sencilla” o inmediata. Sin embargo la resolución se facilita con el uso de fasores.

Hasta ahora los elementos de un circuito RLC han sido definidos por ecuaciones diferenciales relacionando i(t) con v(t).En el estado estacionario, estas expresiones pueden ser reemplazadas por expresiones algebraicas de la forma **V=ZI** donde z es la componente de la impedancia y **V** e **I** la tensión y corriente en el terminal
Entonces si reemplazamos la expresión (4) en las expresiones (6),(7) y (8) vemos que:

$$Z=R=R\|0^o$$
$$Z=j\ \omega\ L=\omega\ L\|\ 90^o$$
$$Z=1/(j\ \omega\ C)=\omega\ C\|\ -90^o$$

Es decir que las inductancias adelantan la tensión con respecto a la corriente mientras que las capacitancias la atrasan. Por otra parte los resistores no producen desfasaje alguno entre tensión y corriente

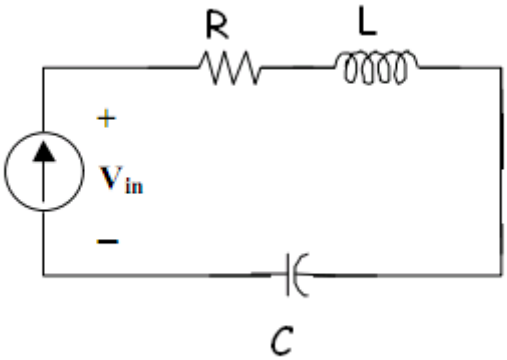

Figura 3: Circuito serie RLC

Con estos datos la resolución del circuito anterior se reduce a expresiones algebraicas. Consideremos que i(t)=3 cos (10^6 + 15º), R=1kΩ, L=2mH y C=0.001 µF

$$Z = \frac{L(jw)^2 + R(jw) + {}^{1}/_{C}}{jw} = jwL + R + \frac{1}{jwC}$$

$$Z = j.10^6.2.10^{-3} + 10^3 + \frac{1}{j10^6.10^{-9}} = 10^3 + j10^3$$

Como resultado se obtiene una impedancia de 1.42 kΩ||45º

III. CONCLUSION

En esta breve reseña sobre el uso de fasores y variables complejas en Ingeniería Eléctrica observamos la gran versatilidad que nos brinda el hecho de "transformar" complejas representaciones sinusoidales en "vectores" del plano complejo, brindándonos facilidades a la hora de realizar operaciones de adición y multiplicación de ondas. Además vemos que, junto al concepto de impedancia, los fasores simplifican de manera notable la resolución de cálculos de corriente y tensión de circuitos RLC sustituyendo las dificultosas tareas de calculo con ecuaciones diferenciales en simples expresiones algebraicas.

[1]Traduccion literal de "rotating phasor"

REFERENCIAS

[1] D. Cunningham y J. Stuller, *Circuit analysis,* Houghton Mifflin,1995.

[2] Wikipedia, *La enciclopedia* libre, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Impedancia , [acceso el 2 de marzo de 2011].(Solo imágenes)