Aplicación de la Transformada de Laplace a Vibraciones Mecánicas Forzadas Funciones de Variable Compleja

Moral, Isaías Ricardo

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
isaiasrmoral@gmail.com
Marzo 2015

Resumen: En este informe se explican los aspectos generales de las Vibraciones Mecánicas Forzadas, y como se pueden resolver las ecuaciones diferenciales obtenidas a partir de la Ley de Newton en la cual se tendrá en cuenta la masa, la Ley de elasticidad de Hooke, el amortiguamiento por fricción o un amortiguador de masa y la aplicación de una fuerza externa constante o variante con el tiempo involucrados en un sistema mecánico de traslación, resolviéndolo aplicando la Transformada de Laplace.

Palabras clave: Vibraciones Mecánicas Forzadas, ecuaciones diferenciales, Transformada de Laplace.

I. INTRODUCCIÓN

Para poder resolver un sistema mecánico de traslación es indispensable tener en cuenta:

La segunda ley de Newton [5] la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo esta relacionada con la masa del cuerpo y su vector aceleración, la fuerza neta a considerar es la resultante de las fuerzas actuantes:

$$\boldsymbol{F}_{neta} = m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$$

Ley de elasticidad de Hooke [4] describe cuánto se alargará un resorte bajo una cierta fuerza mediante la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{F} = -K\boldsymbol{\delta}$$

Siendo k una contante elástica y $\boldsymbol{\delta}$ la deformación del resorte respecto de la posición de equilibrio.

Fuerza de amortiguación [3] ya sea ocasionado por un fluido o por fricción seca entre superficies en contacto, la fuerza de amortiguación es expresada matemáticamente como

$$\boldsymbol{F} = C\boldsymbol{v}$$

Donde C es el amortiguamiento real del sistema medido en N/ (m/s) y v la velocidad del sistema.

Un oscilador armónico amortiguado es aquel que en adición a la fuerza recuperadora dada por la ley de Hooke, experimenta una fuerza de amortiguamiento viscoso proporcional a la velocidad . Si este oscilador amortiguado se encuentra sometido a una fuerza externa adicional, en general dependiente del tiempo, se dice que el oscilador está forzado, siendo su ecuación de movimiento:

$$m\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{x} + C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}(t)$$

La transformada de Laplace,[1] la herramienta elegida para resolver la ecuación diferencial de las vibraciones mecánicas forzadas, se define como:

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Y recurriremos a las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace:

- ***Linealidad***

  Para α, β ∈ C:

  $$\alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$$

- ***Translation***

  Para ∈ C

  $$e^{\alpha t} f(t) \longleftrightarrow F(s - \alpha)$$

- ***Derivadas***

  $$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

- ***Transformada de la función de Delta de Dirac***

  $$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

- ***Propiedad de las derivadas para distribuciones***

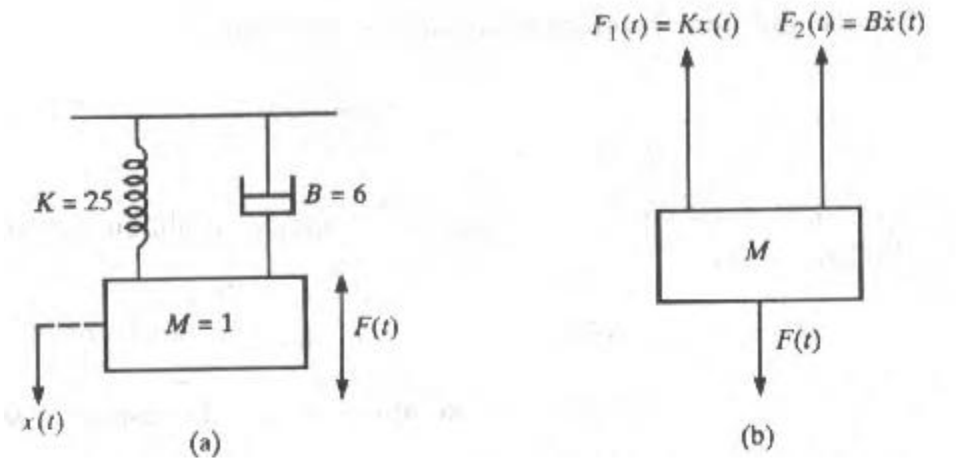
  $$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n F(s)$$

II. DESARROLLO

En la física como en la ingeniería se presentan problemas de Mecánica relacionado a las vibraciones que son ocasionadas por elementos que actúan como resortes, amortiguadores y fuerzas externas. En este tipos de problema se utiliza el siguiente modelo matemático

$$m\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{x} + C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}(t)$$

en nuestro caso tomaremos $\boldsymbol{F}(t)$ continua, representando una fuerza impulsiva y variante con el tiempo de forma senoidal resolviendo las respectivas ecuaciones diferenciales con la transformada de Laplace.



Utilizaremos la Figura (a) como referencia a este tipo de problemas, siendo la Figura (b) el diagrama de cuerpo libre. Las condiciones iniciales del sistema son $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ y la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = \boldsymbol{F}(t)$$

Situaciones:

A. $\boldsymbol{F}(t)$ *continua*

Tomaremos $\mathbf{F}(\mathrm{t}) = 8\mathrm{N}$ para simplificar las cuentas

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 8$$

Aplicando la transformada de Laplace nos queda

$$s^2 X(s) - s\, x_0 - \dot{x}_0 + 6s\, X(s) - 6x_0 + 25\, X(s) = \frac{8}{s}$$

Como las condiciones iniciales son $x_0 = \dot{x}_0 = 0$

$$X(x)(s^2+6s\ +25)=\frac{8}{s}$$
$$X(s)=\frac{8}{s\ (s^2+6s\ +25)}$$

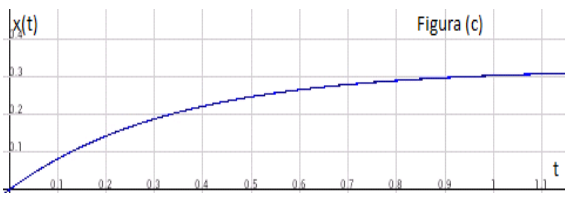
Separando en fracciones simples

$$X(s)\ =\frac{0{,}32}{s}+\frac{-\frac{4}{25}+\frac{i3}{25}}{(s\ +3-4i)}+\frac{-\frac{4}{25}-\frac{i3}{25}}{(s+3+4i)}$$

Utilizando la transformada de Laplace inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(X(s)\big)=x(t)=\ 0{,}32+\left(-\frac{4}{25}+\frac{i3}{25}\right)e^{(-3+i4)t}+\left(-\frac{4}{25}-\frac{i3}{25}\right)e^{(-3-i4)t}$$
$$=\ 0{,}32+\frac{e^{-3t}}{25}\left(-4e^{i4t}+i3e^{i4t}-4e^{-i4t}-i3e^{-i4t}\right)$$
$$=0{,}32+\frac{e^{-3t}}{25}\left((-1)8\left(\frac{e^{i4t}+e^{-i4t}}{2}\right)+(-1)6\left(\frac{e^{i4t}-e^{-i4t}}{2i}\right)\right)$$

$$x(t)=0{,}32-\frac{e^{-3t}}{25}\big(8(\cos 4t)+6(\sin 4t)\big)$$



Cuando t→∞ calculamos la posición final que es $x_\infty\ =0{,}32$

En la figura (c) se muestra un gráfico de la posición en función del tiempo.

B. $\boldsymbol{F}(t)$ *Impulsiva* $\boldsymbol{F}(t)=-8N\ \delta(t)$

Tomaremos **F**(t) = 8N para simplificar las cuentas

$$\ddot{x}+6\dot{x}+25x=-8\ \delta(\mathrm{t})$$

Aplicando la transformada de Laplace y sus propiedades para distribuciones nos queda

$$s^2X(s)+6s\,X(s)+25\ X(s)=-8$$

$$X(x)(s^2+6s\ +25)=8$$

$$X(s)\ =\frac{-8}{(s^2+6s\ \ +25)}$$

Separamos en fracciones simples

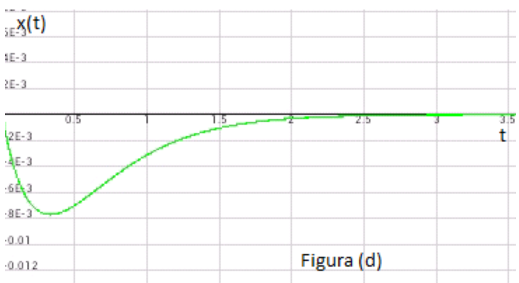
$$X(s)\ =\frac{i}{(s\ \ +3-4i)}+\frac{-i}{(s+3+4i)}$$

Antitransformamos

$$\mathcal{L}^{-1}\big(X(s)\big)=x(t)=\big(ie^{(-3+i4)t}+ie^{(-3-i4)t}\big)h(t)$$
$$=(-1)e^{-3t}\left(\frac{e^{4it}-e^{-4it}}{2i}\right)h(t)$$

$$\mathrm{x(t)}=-e^{-3t}(\sin 4t)h(t)$$

Cuando t→∞ calculamos la posición final que es $x_\infty\ =0$ lo cual resulta lógico ya que el cuerpo vuelve a la posición de equilibrio inicial al no haber una fuerza que se oponga a este.



En la figura (d) se muestra un gráfico de la posición en función del tiempo.

C. *$\boldsymbol{F}(t)$ variante con el tiempo de forma senoidal $\boldsymbol{F}(t) = 4\ sin\ 2t$* [2]

Tomamos $\mathbf{F}(\mathrm{t}) = 4\ \mathrm{sin}\ 2t$ para simplificar las cuentas

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 4\ sin\ 2t$$

Aplicando la transformada de Laplace nos queda

$$s^2 X(s) - s\ x_0 - \dot{x}_0 + 6s\ X(s) - 6x_0 + 25\ X(s) = \frac{8}{s^2+4}$$

Como las condiciones iniciales son $x_0 = \dot{x}_0 = 0$

$$X(x)(s^2 + 6s\ + 25) = 8$$

$$X(s) = \frac{8}{(s^2+4)(s^2+6s\ +25)}$$

Resolviendo en fracciones simples

$$X(s) = \frac{\frac{4}{195}(-4s+14)}{(s^2+4)} + \frac{\frac{2}{195}(8s+20)}{(s^2+6s\ +25)} = \frac{\frac{4}{195}(-4s+14)}{(s^2+4)} + \frac{\frac{2}{195}(8(s+3)-4)}{(s+3)^2+16}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene la solución

$$\mathcal{L}^{-1}\big(X(s)\big) = x(t) = \frac{4}{195}(7\ sin\ 2t - 4\ cos\ 2t) + \frac{2}{195}e^{-3t}(8\,cos\ 4t\ - sin\ 4t)$$

Cuando t→∞ intentamos calcular la posición final que es x_∞ la cual no existe ya que el término $\frac{4}{195}(7\ \mathrm{sin}\ 2\mathrm{t} - 4\ \mathrm{cos}\ 2\mathrm{t})$ oscila y está en resonancia con el sistema, la resonancia tiene importancia practica ya que puede llevar al colapso del sistema aunque parezca de poca importancia.

En la figura (e) se muestra un gráfico de la posición en función del tiempo.

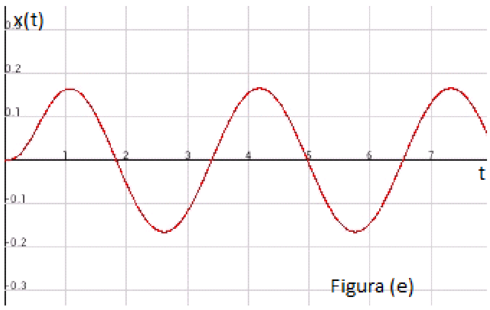


Figura (e)

III. CONCLUSIÓN

Luego de analizar distintas situaciones a la cual se puede aplicar la transformada de Laplace, se denota que esta herramienta es muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales, obtenidas a partir de leyes físicas, lo cual simplifica los cálculos a simples ecuaciones aritméticas. Y al antitransformar se obtiene una ecuación la cual se puede comprobar fácilmente las condiciones iniciales y las ecuaciones diferenciales.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 2do. Cuatrimestre 2014, pp.47-52.

[2] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002. pp.135-137

[3] Amortiguamiento Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Amortiguamiento, [acceso el 9 de marzo de 2015].

[4] Ley de elasticidad de Hooke Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_elasticidad_de_Hooke, [acceso el 9 de marzo de 2015].

[5] Oscilaciones forzadas Laplace, *Universidad de Sevilla*, [internet], disponible en http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_forzadas, [acceso el 9 de marzo de 2015].