# Transformada de Laplace y sus aplicaciones a vibraciones mecánicas

Montero Joaquín

*Estudiante de Ingeniería Electrónica*
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*Joaco_am@hotmail.com*

Agosto 2012

Resumen: Dentro de las aplicaciones de los contenidos de Funciones de Variable Compleja en los problemas de Ingeniería se puede observar el uso de la Transformada de Laplace en la resolución de sistemas mecánicos de vibraciones, también llamados Vibraciones Mecánicas. El siguiente informe detallará las principales cuestiones acerca de la resolución de ecuaciones diferenciales generadas para resolver los sistemas de traslación, en los cuales se ven involucrados resortes y amortiguadores.

## I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace posee la propiedad de la derivada, que provee a los ingenieros de una herramienta muy útil a la hora de resolver ecuaciones diferenciales.

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Al transformar toda una ecuación diferencial siguiendo estos lineamientos, es posible obtener un resultado de la transformada, (siempre y cuando las condiciones iniciales estén pautadas, ya que la propiedad exige conocer dichos valores para poder transformar adecuadamente una derivada de una función) al despejar F(s) en función de s.

Finalmente, para poder llegar a la ecuación deseada, f(t), el último paso a llevar a cabo es aplicar la transformada inversa a la expresión que se desarrolló previamente.

## II. VIBRACIONES MECÁNICAS

Para estudiar el sistema se trabaja con variables asociadas al desplazamiento (medido en m), al tiempo (medidas en s) y la fuerza (medida en N).

Un sistema convencional de este tipo posee distintos elementos característicos:

La masa del elemento (M), la cual es medida en Kg; los resortes asociados a la misma, cuya rigidez es medida con una constante K (expresada en N/m); y los amortiguadores, con coeficientes constantes de amortiguamiento B, medidos en Ns/m.

Es necesario suponer que los resortes y amortiguadores se comportan linealmente (es decir, que son “ideales”). De este modo, las relaciones entre la fuerza y el desplazamiento quedarán expresadas de la siguiente manera:

Fuerza total en el sistema:

$$\Sigma F = m.a \qquad\qquad F = m.\frac{d^2x}{dt^2} = m.\ddot{x} \tag{1}$$

Fuerza ejercida por el resorte:

$$F = K.x \tag{2}$$

Fuerza ejercida por el amortiguador:

$$F = B.\frac{dx}{dt} \qquad\qquad F = B.\ddot{x} \tag{3}$$

Una vez que tenemos estas relaciones, se desarrolla la ecuación general por medio de la Ley de Newton, sumando a las mismas para obtener la ecuación diferencial a transformar.

La transformada de Laplace nos ayuda a resolver el problema algebraico lineal mediante su propiedad de la derivada: al transformar ambos miembros de la ecuación, obtenemos una nueva igualdad expresada, donde es posible despejar la función transformada en términos de s.

Con la transformación de la ecuación ya realizada, se opera algebraicamente y se obtiene una expresión de la función en términos de s, para, finalmente, realizar la transformación inversa de Laplace y adquirir una expresión de la posición con respecto al tiempo.

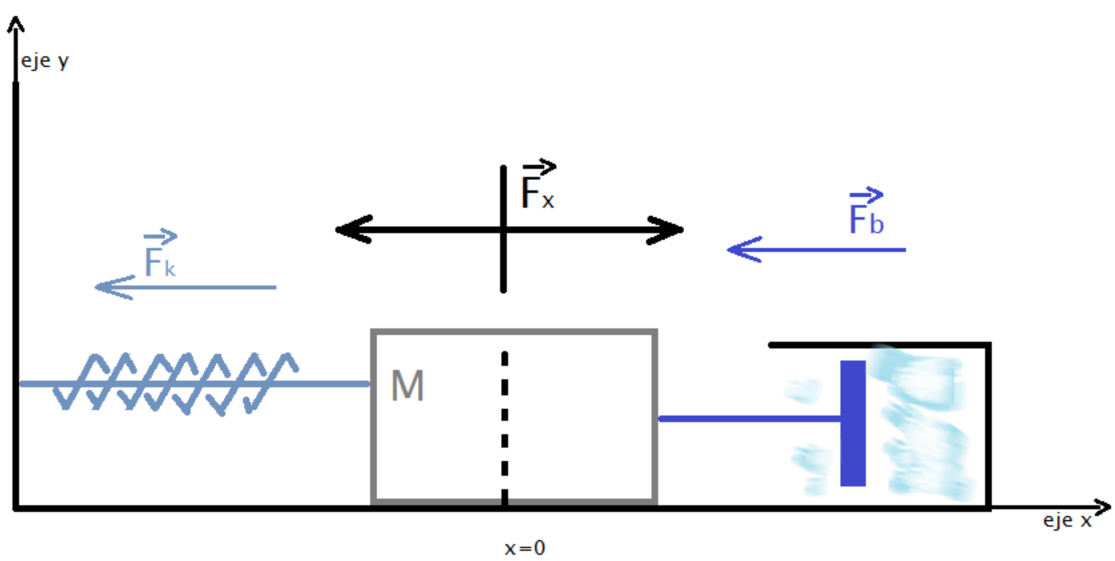
Podemos desarrollar un ejemplo como para demostrar la utilidad de la Transformada de Laplace en este tipo de situaciones:

## III. DEMOSTRACIÓN GENERAL

Teniendo un sistema como el que se muestra en la figura, la masa M está sometida a una fuerza periódica externa $\vec{f_x}$ cuya variación depende del tiempo tal que

$$\vec{f_x} = a.sen\,wt\ , \tag{4}$$

teniendo como constantes "a" y "w".




A su vez, la variación de la posición de la masa con respecto al origen (que en este caso es el punto de equilibrio del sistema) genera una fuerza elástica $\vec{f_k}$ que varía con respecto a la posición de la masa:

$$\vec{f_k} = K.x(t) \tag{5}$$

Finalmente, la velocidad que adquiera el sistema produce una fuerza resistiva generada por el pistón de la forma

$$\vec{f_b} = B.\dot{x}(t) \tag{6}$$

Teniendo todas las fuerzas, mediante la Ley de Newton es posible armar una ecuación diferencial de la forma:

$$\vec{f_x} - \vec{f_k} - \vec{f_b} = M.a \tag{7}$$

Que, en función de x(t) tenemos que:

$$a.sen\, wt = K.x(t) + B.\dot{x}(t) + M.\ddot{x}(t) \tag{8}$$

Aplicando la Transformada de Laplace en ambos lados obtenemos

$$(K + Bs + Ms^2)X(s) = \frac{a.w}{s^2 + w^2}$$

Entonces

$$X(s) = \frac{a.w}{(K + Bs + Ms^2).(s^2 + w^2)}$$

Una vez realizada la separación por fracciones, se procede a aplicar la transformada inversa de Laplace, llegando finalmente a la expresión de x(t) deseada. Luego, si se desea calcular la velocidad o aceleración con respecto al tiempo el único paso pendiente será derivar el resultado anterior con respecto a t.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. 1er. Cuatrimestre 2012, página 61.

[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, paginas 135-137.