Respuesta Impulsiva usando Transformada de Laplace

Lucas Milstein

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
milsteinlucas@gmail.com
Marzo 2012

Resumen: El objetivo del presente informe consiste en mostrar brevemente el uso de funciones impulsivas para el cálculo de respuestas de un dipolo o sistema. La respuesta impulsiva permite conocer el comportamiento propio del circuito o sistema (la estructura de polos y ceros) sin ser modificado por la excitación, lo cual constituye un indicador de máxima importancia para predecir el comportamiento frente a estímulos más complejos. Concretamente se aplicará el uso de esta función para hallar la respuesta impulsiva de un circuito de conexión serie RC sometida a una excitación impulsiva de tensión.

Palabras clave: Respuesta impulsiva, Delta de Dirac, transformada de Laplace, polos, ceros.

I. INTRODUCCIÓN

Ciertos problemas físicos llevan a intentar extender el concepto de función de manera que incluya nuevos objetos matemáticos, llamados funciones generalizadas o distribuciones, que difieren notablemente de las funciones tradicionales. Una de las distribuciones más utilizadas es la que lleva el nombre de Dirac, impulso o delta de Dirac, que fue quien la utilizó en mecánica cuántica en los años 1920. Esta distribución es de gran aplicación en el estudio de sistemas físicos sometidos a fuerzas o cargas repentinas y de muy corta duración es la base sobre la cual trabaja la respuesta de un sistema o circuito. A través del teorema de Duhamel o convolución se logra evaluar la respuesta de un circuito o sistema lineal entre una excitación cualquiera a partir de dicha excitación y del conocimiento de la respuesta impulsiva.

En [2], se define la función delta δ de Dirac por la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).f(t)dt = f(0). \tag{1}$$

Donde $f(t)$ es una función arbitraria continua en el origen. El símbolo de integral es sólo una notación, no indica la integración ordinaria de funciones. Se entiende como un proceso que se le aplica a la función f y se obtiene $f(0)$.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

Para comenzar, se dará una breve definición de los elementos involucrados y sus respectivas ecuaciones matemáticas.

a. Los circuitos eléctricos pasivos son construidos con tres elementos básicos: resistores (que tienen resistencia R medida en ohms [Ω]), capacitores (que tienen capacitancia C, medida en faradios [F]), con las variables asociadas y voltaje $v(t)$ (medido en volts [V]).

b. La respuesta temporal de un circuito $r(t)$ puede expresarse como el producto convolución entre la función que describe al circuito $f(t)$ y la excitación $e(t)$ que se le haya aplicado al mismo.

$$\mathrm{r(t) = f(t) * e(t)} \tag{2}$$

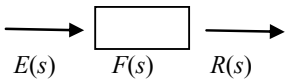

Figura 1: Diagrama en bloque del proceso de transformación.

En el campo transformado de Laplace este producto convolución se ve como un producto algebraico entre la respuesta natural o libre del circuito $F(s)$ y la excitación $E(s)$ que se le aplique, como se desarrolla en [3]. Este proceso de transformación se ilustra en la figura 1.

$$R(s) = F(s).E(s) \tag{3}$$

c. Respuesta Natural o Libre es la parte de la respuesta que depende de los polos propios del sistema; en cambio la respuesta forzada es la que depende de los polos de la excitación.
Si se aplica un impulso unitario $\delta(t)$ a un circuito arbitrario, entonces (1) quedará expresada como

$$r(t) = f(t) * \delta(t) \tag{4}$$

Que en el campo transformado dicha excitación pasa a ser una constante, lo cual deja en evidencia que la respuesta es equivalente a la respuesta natural o libre.

$$R(s) = F(s).Cte \tag{5}$$

$$R(s) = F(s) \tag{6}$$

Antitransformando Laplace en (6) se obtiene la respuesta en el tiempo

$$r(t) = f(t) \tag{7}$$

El motivo por el cual resulta de vital importancia la respuesta de un circuito ante una excitación impulsiva es porque con esta se puede conocer el comportamiento de un circuito independientemente de la excitación que se le aplique, dado que al excitar un circuito arbitrario con un impulso unitario no se modificará su estructura de polos y ceros, la cual es responsable de la forma que tendrá la respuesta temporal, como se detalla en [1] y [3].

En la estructura de polos y ceros de un circuito se pueden dar los siguientes casos:

- Tener polos reales simples o múltiples, como así también complejos conjugados simples o múltiples, ubicados en el semiplano derecho del plano complejo, obteniéndose así una respuesta temporal inestable (no acotada), por el contrario si dichos polos están ubicados en el semiplano izquierdo la respuesta será estable (acotada). Ver figuras 2, 3 y 4.

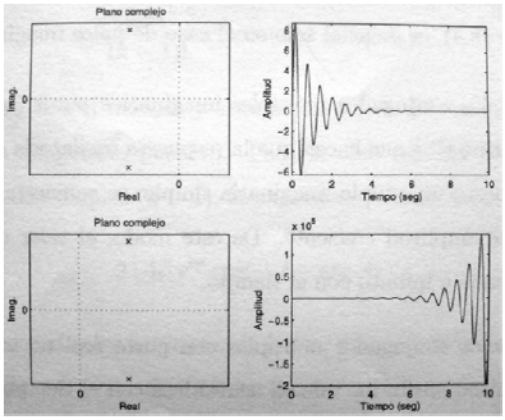

Figura 2: Polos complejos conjugados simples.

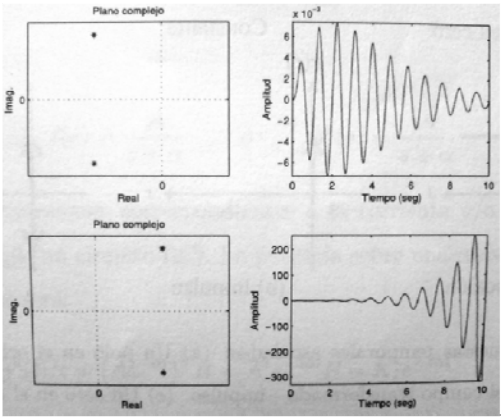

Figura 3: Polos complejos conjugados múltiples.

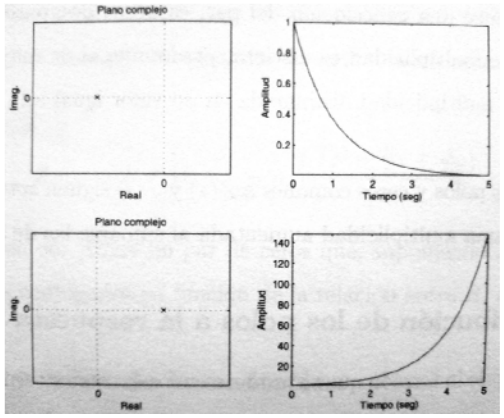

Figura 4: Respuesta asociada a polos reales simples

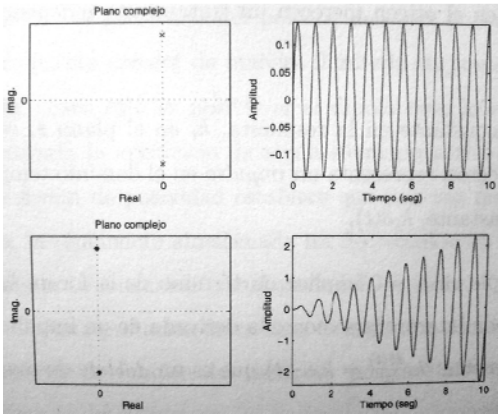

Figura 5: Polos complejos conjugados sobre el eje Im(z)

- Tener polos complejos conjugados simples sobre el eje imaginario dando como respuesta temporal una oscilación sostenida en el tiempo (estable). Ver gráficos superiores de la figura 5.
- Tener polos complejos conjugados múltiples sobre el eje imaginario, la respuesta temporal será inestable. Ver gráficos inferiores de la figura 5.
- Si posee un polo simple en el origen la respuesta temporal será un escalón multiplicado por una constante.

III. Aplicación Práctica

Se analizará en base a las herramientas brindadas anteriormente el circuito de la figura 6, donde se buscará hallar V_c.

Reemplazando en (2) $e(t) = \delta(t)$, $Z_c = 1/sC$ (impedancia del capacitor en el campo transformado) y R (resistencia lineal), se obtiene que la respuesta impulsiva es (3) con E(s) = 1.

Por lo tanto (planteando un divisor resistivo, y reacomodando)

$$Vc(s) = \frac{E(s).\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$Vc(s) = E(s).\frac{sC}{sC(sRC + 1)}$$

$$Vc(s) = \frac{E(s)}{sRC + 1}$$

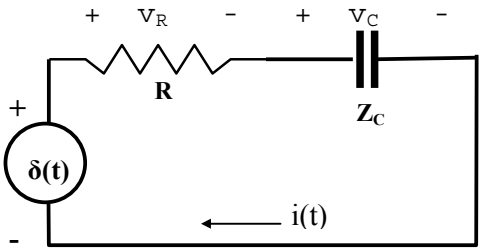

Figura 6: Diagrama de conexión serie RC.

$$Vc(s) = \frac{E(s)}{RC\left(s + \left(\frac{1}{RC}\right)\right)}$$

$$Vc(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \left(\frac{1}{RC}\right)}$$

$$Vc(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s - \left(-\frac{1}{RC}\right)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene la respuesta temporal

$$r(t) = Vc(t) = \frac{1}{RC}.\left(e^{\left(-\frac{1}{RC}\right)t}\right).$$

Finalmente, una interpretación gráfica de la evolución temporal de la respuesta impulsiva se muestra en la figura 7.

IV. Conclusiones

Estudiar funciones de variable compleja, es de gran utilidad para ingenieros eléctricos y electrónicos. El uso de las "herramientas" adquiridas, permite modelar cuestiones complejas tanto de electricidad como de circuitos en forma más simple.

Se pudo observar en el desarrollo de este informe el uso de varios temas de la materia, como lo son funciones impulsivas, transformada de Laplace, Números Complejos y Singularidades, los cuales resultaron de de vital importancia para encontrar la respuesta de un circuito del cual solo se conocían los polos pero no su comportamiento ante una excitación.

Agradecimientos

En la búsqueda, elección e interpretación de esta aplicación ha sido muy importante la colaboración del Sr. Federico Arroyo.

Referencias

[1] P. Doñate, *Notas de curso, Análisis de circuitos y sistemas*, Universidad Nacional del Sur, 2011.

[2] G. Calandrini, *Guía de definiciones y teoremas del curso de Funciones de Variable Compleja*, 2011.

[3] F. Arroyo, *Apuntes de clase de la asignatura Análisis de circuitos y sistemas*, Universidad Nacional del Sur, 2011.

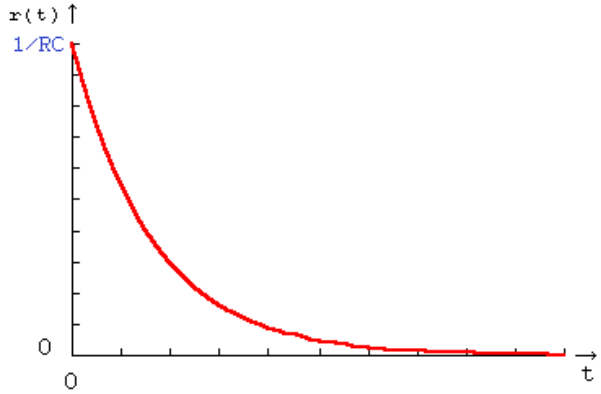

Figura 7 : Respuesta Impulsiva *r*(*t*)