Aplicación de la Transformada de Laplace en el análisis de circuitos eléctricos

Maximiliano Gabriel Tiberi

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
maxi.tiberi@gmail.com
Agosto 2013

Resumen: Como tema principal de la nota de aplicación de la asignatura Funciones de Variable Compleja se eligió la Transformada de Laplace, herramienta que ha sido aplicada con éxito tanto en la teoría de circuitos como en la teoría de vibraciones. En general la Transformada de Laplace resulta útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales en el origen, ya que las transforma en ecuaciones polinómicas, que se resuelven utilizando solamente operaciones algebraicas.

Palabras clave: Transformada de Laplace, ecuaciones diferenciales, circuitos eléctricos.

I. Introducción

En la actualidad la aplicación de circuitos eléctricos resulta común, dado que muchos de los aparatos que nos rodean en nuestra vida, como el celular, la televisión y la computadora, entre muchos otros, requieren de circuitos eléctricos simples, combinados y complejos para su funcionamiento. En esta nota se analizara un circuito eléctrico simple, cuyo comportamiento se describe a través de una ecuación diferencial.

La Transformada de Laplace es una forma de resolver, de las muchas que hay, este tipo de ecuaciones de una manera sencilla.

Antes de desarrollar un ejemplo en el cual se pueda observar cómo se aplica la Transformada de Laplace, se presentaran algunos conceptos que serán utilizados en este, con el fin de lograr una buena comprensión de lo realizado.

II. Componentes del Circuito

El circuito que se va a utilizar es un circuito en paralelo que contiene tres resistencias eléctricas (resistores) y un par de bobinas (inductores), todo se encuentra conectado a una fuente. El comportamiento de este tipo de circuito se describe generalmente por una ecuación diferencial de segundo orden, que se obtiene a través del uso de diferentes leyes de la electrónica.

A continuación se realizara una breve descripción de los diferentes componentes del circuito y se enunciaran las leyes utilizadas.

A. *Resistor*

Se denomina resistor (Figura 1) al componente electrónico diseñado para introducir una resistencia eléctrica, se opone al paso de la corriente, determinada entre dos puntos de un circuito eléctrico. Su función es disminuir la corriente que pasa. Esta resistencia R provocada por el resistor es medida en ohms [Ω].

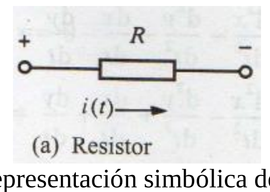

Figura 1: Representación simbólica de un resistor.

B. Inductores

Un inductor (Figura 2) o bobina es un componente pasivo de un circuito eléctrico que, debido al fenómeno de la autoinducción, almacena energía en forma de campo magnético. Un inductor está constituido normalmente por una bobina de conductor, típicamente alambre de cobre. Poseen una inductancia L medida en henrys [H].

Al pasar la corriente a través de una bobina L, se produce un campo magnético que se opone a cualquier cambio en la corriente que circula a través de ella.

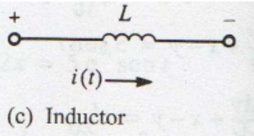

Figura 2: Representación simbólica de un inductor.

C. Leyes y relaciones

Además de los tres elementos descriptos anteriormente, hay que tener en cuenta la corriente i(t) medida en amperes [A], el voltaje v(t) medido en volts [V] y la carga q(t) medida en coulombs, asociados al circuito.

Relación 1 *El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga q(t) mediante la relación:*

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Relación 2 *La relación entre el flujo de corriente i(t) y la caída de voltaje v(t) a través de la resistencia es igual a Ri (**Ley de Ohm**).*

La interacción entre los diferentes componentes individuales que forman un circuito RLC está determinada por las **leyes de Kirchhoff**:

Ley 1 *La suma de las corrientes que entran a cualquier unión en un circuito debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de dicha unión:* $\sum I_{entra} = \sum I_{sale}$.

Ley 2 *La suma de diferencias de potencial a través de todos los elementos de cualquier espira de circuito cerrado debe ser cero:* $\sum_{circuito\ cerrado} \Delta V = 0$.

III. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace es de gran importancia en la ingeniería ya que permite reducir ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes a simples expresiones algebraicas de sencilla resolución.

La transformada de Laplace de una función f(t) definida para todos los números positivos t ≥ 0, es la función F(s), definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

siempre y cuando la integral este definida.
La función original f(t) se conoce como transformada inversa o inversa de F(s), es decir

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

A continuación enunciaremos un teorema en particular que luego será utilizado en el ejemplo.

Teorema 1 *Sea f(t) una función tal que su transformada de Laplace es F(s), Re(s)>p. Sea α ϵ C, entonces la función* $e^{\alpha t} f(t)$ *tiene también transformada de Laplace, y estará dada por:*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$$

con Re(s)>p+Re(a).

IV. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Dado que ya hemos enunciado los diferentes conceptos, que eran necesarios conocer para una mejor comprensión del ejemplo, ahora podemos proceder a aplicarlos en un circuito eléctrico específico.

El método de resolución resultara bastante sencillo; primero se buscara plantear las ecuaciones diferenciales que caractericen el comportamiento del circuito. En segundo lugar se aplicara la técnica de transformada de Laplace para así poder transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica, la cual se puede resolver fácilmente. Por último se aplica la transformada inversa para recuperar las soluciones al problema original.

El ejemplo se desarrollara sobre el circuito en paralelo de la figura 3 que está compuesto por tres resistores (R_1, R_2 y R_3) y dos bobinas (L_1 y L_2) conectados a una fuente de voltaje e(t). Antes de cerrar el interruptor en el tiempo t=0, la corriente resultante en el circuito es cero. Determinaremos las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ que circulan en cada malla del circuito en el tiempo t.

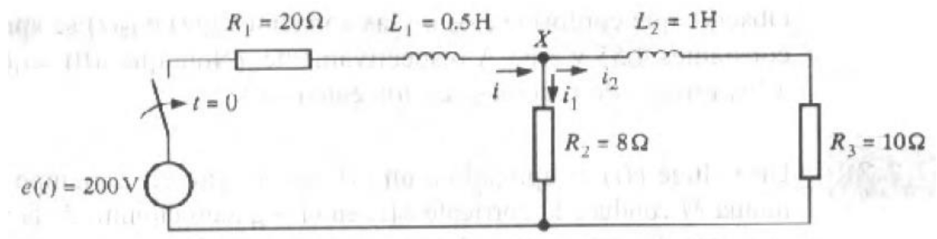

Figura 3: Representación del circuito eléctrico a estudiar.

Aplicando la **ley 1** de Kirchhoff al nodo X obtenemos:

$$i = i_1 + i_2$$

Aplicando la **ley 2** de Kirchhoff a cada una de las mallas del circuito se obtiene:

$$R_1(i_1 + i_2) + L_1 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} + R_2 i_1 = e(t) = 200$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_2 - R_2 i_1 = 0$$

Sustituyendo los valores dados para las resistencias y las bobinas da:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + 56 i_1 + 40 i_2 = 400$$

$$\frac{di_2}{dt} - 8 i_1 + 10 i_2$$

Aplicando la transformada de Laplace y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $i_1(0) = 0$ *e* $i_2(0) = 0$ llegamos a las ecuaciones transformadas

$$(s + 56) I_1(s) + (s + 40) I_2(s) = \frac{400}{s}$$

$$-8 I_1(s) + (s + 10) I_2(s) = 0$$

Trabajando con el sistema de dos ecuaciones anterior obtenemos:

$$I_2(s) = \frac{3200}{s(s^2 + 74s + 880)} = \frac{3200}{s(s + 59.1)(s + 14.9)}$$

Utilizando el método de fracciones parciales da

$$I_2(s) = \frac{3.64}{s} + \frac{1.22}{s + 59.1} - \frac{4.86}{s + 14.9}$$

Por último se aplica la transformada inversa para así obtener:

$$i_2(t) = 3.64 + 1.22e^{-59.1t} - 4.86e^{-14.9t}$$

Luego del sistema de ecuaciones obtenemos la corriente restante:

$$i_1(t) = \frac{1}{8}\left(10i_2 + \frac{di_2}{dt}\right)$$

Esto es

$$i_1(t) = 4.55 - 7.49e^{-59.1t} + 2.98e^{-14.9t}$$

V. Conclusiones

Se puede observar como la transformada de Laplace permite resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (presentes en los circuitos eléctricos) de una manera simple y mecánica, ya que solo basta con seguir los pasos mencionados para encontrar una solución al problema. Por lo tanto la transformada de Laplace resulta ser una herramienta matemática muy útil al momento de resolver problemas relacionados a los circuitos eléctricos.

Referencias

[1] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002, pp. 130-135.

[2] G. Calandrini, *Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja.*1er. cuatrimestre 2011, pp. 56-63.

[3] R.A. Serway y R.J. Beichner, *Física II Para Ciencias e Ingeniería,* McGraw-Hill, 2001, pp. 877-878.

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], Resistor, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Resistencia_el%C3%A9ctrica, [acceso el 19 de julio de 2013].

[5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], Inductor, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Bobina, [acceso el 19 de julio de 2013].