Series de Fourier: Análisis de sistemas de control realimentados no lineales mediante el método de la función descriptiva.

Maximiliano Garcia Perretti

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
maxitrelew@gmail.com
Agosto 2013

Resumen: Se describe el método de la función descriptiva, para analizar y predecir comportamientos de elementos no lineales de un sistema de control, el cual se obtiene por aproximación aplicando la expansión en serie de Fourier y permite analizar sistemas no lineales con técnicas desarrolladas para los sistemas lineales. Además se desarrolla el método para el caso particular de un relé.

Palabras clave: serie de Fourier, sistemas de control, función descriptiva, relé, respuesta de frecuencia.

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos más frecuentes utilizados en ingeniería para el análisis y diseño de sistemas de control realimentados lineales están basados en el empleo de la función de transferencia, la cual caracteriza las relaciones de entrada-salida de estos sistemas.

[1]Uno de estos métodos es el de la respuesta de frecuencia, que se define como la respuesta a la frecuencia de un sistema estacionario, o de régimen permanente, a una entrada sinusoidal. Si se considera un sistema lineal con una entrada sinusoidal

$$e(t) = X\text{sen}(\omega t) \tag{1}$$

se puede demostrar que la salida en régimen permanente será de la forma

$$y(t) = Y\text{sen}(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

La respuesta de frecuencia consiste precisamente en determinar la amplitud Y y la fase φ de la salida para una amplitud de entrada X constante, al ir variando la frecuencia ω de la señal de entrada $e(t)$.

El concepto de función de transferencia está basado en la propiedad de linealidad que no poseen, por su propia naturaleza, los sistemas no lineales. Sin embargo, como vamos a ver en lo que sigue, es posible aplicar una versión ampliada del método de la respuesta de frecuencia a sistemas no lineales mediante el método de la función descriptiva. Si bien en este último caso los resultados son exclusivamente aproximados.

II. MÉTODO DE LA FUNCION DESCRIPTIVA

Esencialmente, el método consiste en reemplazar la no linealidad del sistema por una ganancia N equivalente y después usar las técnicas desarrolladas para los sistemas lineales, tales como el métodos de respuesta de frecuencia.

Supuestos básicos del método:

1. Hay un único componente no lineal.
2. Ese componente es invariante en el tiempo
3. La parte lineal se comporta como un filtro pasa-bajo.

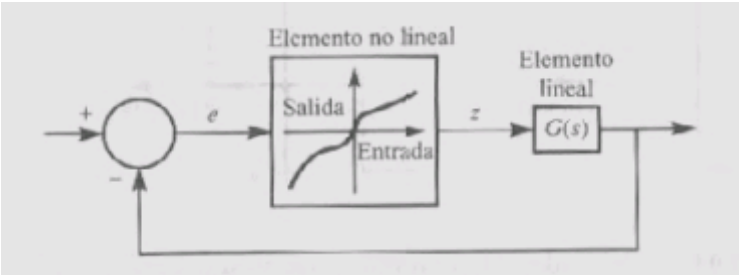

Figura 1: Sistema de control no lineal

4. La no linealidad es simétrica, de modo que no aparece en la salida una señal de continua, cuando la señal de entrada es sinusoidal.

Los sistemas de control que presentan estas características se pueden representar mediante el diagrama de bloques de la figura 1. Si el elemento no lineal es sometido a una entrada sinusoidal (1) entonces su salida $Z(t)$ puede representarse por la expansión en serie de Fourier

$$Z(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega t) \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) \tag{4}$$

con $A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$ y $\phi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$. Si consideramos únicamente la componente fundamental del desarrollo en serie, y teniendo en cuenta el supuesto 1 tomamos $a_0 = 0$, la expresión (4) se convierte en

$$Z(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) \tag{5}$$

A partir de esta ecuación podemos concluir que la componente fundamental de la salida de un sistema no lineal a una señal sinusoidal de entrada, es otra señal sinusoidal de la misma frecuencia pero de amplitud A_1 y desfase ϕ_1, empleando una representación compleja (5) puede escribirse como

$$Z(t) = A_1\, e^{i(\omega t + \phi_1)} \tag{6}$$

Con los anteriores elementos ya estamos en condiciones de definir la función descriptiva N(X) del elemento no lineal, como la razón compleja de la componente fundamental de la salida (6) entre la señal sinusoidal de entrada (1), esto es:

$$N(X) = \frac{A_1\, e^{i(\omega t + \phi_1)}}{X\, e^{i(\omega t)}} \tag{6}$$

$$= \frac{A_1}{X}\, e^{i\phi_1} \tag{7}$$

[3]La función descriptiva $N(X)$ es una función compleja cuyo módulo y argumento representan la amplificación y el desfase del primer armónico de la salida $Z(t)$de un sistema no lineal ante una entrada sinusoidal de amplitud X y frecuencia ω. Teniendo en cuanta que las ecuaciones (2) y (5) son equivalentes, el concepto de función descriptiva puede, por tanto, ser considerado como una ampliación de la noción de respuesta de frecuencia de los sistemas lineales. Las diferencias entre ambos conceptos se limitan a que la función descriptiva de un elemento no lineal depende de la amplitud, mientras que la función de transferencia

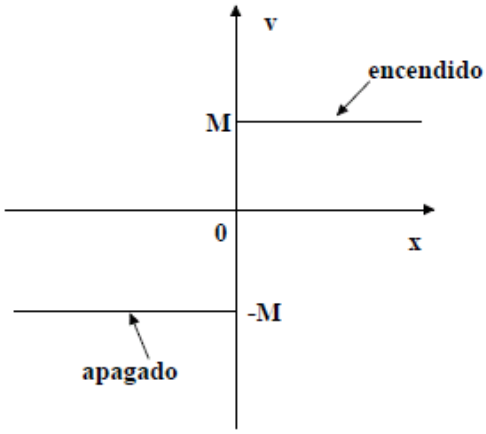

Figura 2: Característica de un relé.

de un elemento lineal no depende de ella. Sin embargo, con vistas a las aplicaciones al diseño de sistemas realimentados pueden tratarse de forma análoga.

[2]Una vez determinada la función descriptiva, el comportamiento del sistema de lazo cerrado está determinado por la ecuación característica

$$1 + N(X)G(i\omega) = 0 \tag{8}$$

Si se puede encontrar una combinación de X y ω de manera que satisfaga esta ecuación entonces el sistema es capaz de mantener oscilaciones en esa frecuencia y magnitud; esto es, el sistema exhibe un comportamiento al ciclo límite. En general se puede encontrar mas de una combinación y la oscilación resultante puede ser un ciclo límite estable o inestable.

Normalmente la ecuación característica se investiga gráficamente dibujando $G(i\omega)\ y - 1/N(X)$, para todos los valores de X en el mismo diagrama polar. Entonces el ciclo límite sucede a frecuencias y amplitudes que corresponden a los puntos de intersección de las curvas. Algunas veces los dibujos se pueden evitar calculando el valor máximo de $N(X)$ y el valor de la ganancia asociada con $G(s)$ que provocará que suceda el ciclo límite.

III. Función descriptiva de un relé

La característica no lineal de un relé se muestra en la figura 2, la que se puede representar por medio de la función

$$Z(t) = \begin{cases} -M, & -\pi < t < 0 \\ M, & 0 < t < \pi \end{cases} \tag{9}$$

que tiene como términos de expansión es serie de Fourier

$$b_n = \begin{cases} \frac{4M}{n\pi}, & si\ n\ es\ inpar \\ 0, & si\ n\ es\ par \end{cases} \tag{10}$$

Si tomamos el primer término de la expansión $b_1 = \frac{4M}{\pi}$ podemos calcular los elementos de la ecuación (7), en donde $A_1 = \frac{4M}{\pi}$ y $\phi_1 = 0$. De esta manera obtenemos la siguiente función descriptiva para el relé con una señal de entrada $X\text{sen}(\omega t)$

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \tag{11}$$

REFERENCIAS

[1] Análisis en el Dominio de la Frecuencia, [internet], disponible en http://isa.uniovi.es/docencia/ra_marina/UCLM_TEMA7.PDF .

[2] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

[3] Javier Aracil, Francisco Gordillo y Francisco Salas, "Notas del curso "Análisis de Sistemas no Lineales"", [internet], sep. 2007, disponible en http://www.esi2.us.es/~fsalas/asignaturas/TS3IT07_08/apuntes.pdf.