Uso de la transformada de Laplace en el análisis de circuitos eléctricos
Funciones de Variable Compleja

Maximiliano A. Polidori

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
maxi_5_pepo@hotmail.com

Agosto 2013

Resumen: En este informe mostraremos como aplicar la transformada de Laplace para la resolución de circuitos eléctricos. Con esta herramienta podemos resolver las ecuaciones diferenciales de los circuitos de manera sencilla, donde las condiciones iniciales de éstos son conocidas de antemano.

Palabras clave: transformada, Laplace, ecuaciones, circuitos, resistor, capacitor

I. INTRODUCCIÓN

En Física e Ingeniería se suelen usar ecuaciones diferenciales para el modelado de fenómenos físicos. Si bien hay muchos métodos para resolver ecuaciones diferenciales, en este informe se describirá como aplicar la transformada de Laplace para su resolución. Con esta herramienta podremos reducir las ecuaciones diferenciales a simples expresiones algebraicas de sencilla resolución, donde las condiciones iniciales de éstas son previamente conocidas. En este informe se detallará como resolver ecuaciones diferenciales en el análisis de circuitos eléctricos y se mostrará un ejemplo de su aplicación.

II. TRANSFORMADA DE LAPLACE. ANTI-TRANSFORMADA. PROPIEDADES

Definimos la transformada de Laplace de una función $f(t)$ de la siguiente manera:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

donde s es una variable compleja y e^{-st} es llamado el núcleo de la transformación.

Es decir, la transformada de Laplace toma una función $f(t)$ en el dominio t (usualmente llamado el dominio de tiempo) definida para $t \geq 0$ y le asocia una función de variable compleja $F(s)$ en el dominio s (usualmente llamado dominio de frecuencia compleja). La transformada de Laplace de $f(t)$ existe si la integral impropia converge.

El proceso inverso se llama anti-transformada o transformada inversa de Laplace, que transforma una función de variable compleja $F(s)$ en una función de variable real $f(t)$, donde $t \geq 0$.

Al resolver el problema en el dominio s, aplicaremos la transformada inversa de Laplace para volver al dominio t. En este caso, la anti-transformada de F(s) es la función original $f(t)$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Para calcular la transformada o anti-transformada de Laplace de una función no lo haremos por definición sino que usaremos propiedades y alguna tabla de transformadas de funciones conocidas.

En la figura 1 se ve un esquema de la transformada de una función del dominio t al dominio s y viceversa.

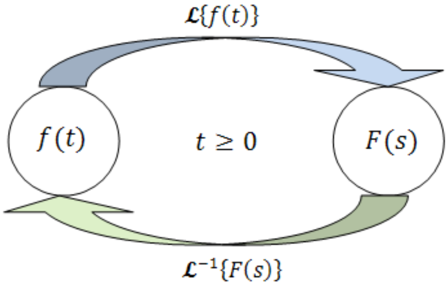

Figura 1: Esquema de la transformada y la anti-transformada de una función

Algunas propiedades de la transformada de Laplace son:

A. LINEALIDAD

- $\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(t)\} + \beta \boldsymbol{\mathcal{L}}\{g(t)\}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (1)

B. DERIVADAS

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$ y continua en $t = 0$

- $\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f'(t)\} = s\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(t)\} - f(0)$ (2)
- $\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f''(t)\} = s^2\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$

C. INTEGRALES

- $\boldsymbol{\mathcal{L}}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(t)\}$

Algunas transformadas de funciones conocidas son:

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s} \tag{3}$$

$$e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha} \tag{4}$$

III. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Un circuito es una red eléctrica (interconexión de dos o más componentes, tales como resistencias, inductores, condensadores, fuentes, interruptores y semiconductores) que contiene al menos una trayectoria cerrada.
Los circuitos eléctricos pasivos están formados con tres elementos básicos: resistores (que tienen resistencia R, medida en ohms Ω), capacitores (que tienen capacitancia C, medida en farads F) e inductores (que tienen inductancia L, medida en henrys H), con las variables asociadas corriente $i(t)$ (medida en amperes A) y voltaje $v(t)$ (medido en volts V). El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga $q(t)$ (medida en Coulombs C) mediante la siguiente relación:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{5}$$

Convencionalmente, los elementos básicos se representan simbólicamente como en la figura 2.

Las relaciones entre el flujo de corriente $i(t)$ y la caída de voltaje $v(t)$ a través de estos elementos en el tiempo t son:

- caída de voltaje a través del resistor: Ri
- caída de voltaje a través del capacitor: $\frac{1}{C}\int_0^t i\, dt$

La interacción entre los elementos individuales que forman un circuito eléctrico está determinada por las leyes de Kirchhoff:

Ley 1: *La suma de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es igual a la suma de las corrientes que salen de dicha unión.*

Ley 2: *En una espira, la suma de todas las caídas de voltaje es igual al voltaje total suministrado.*

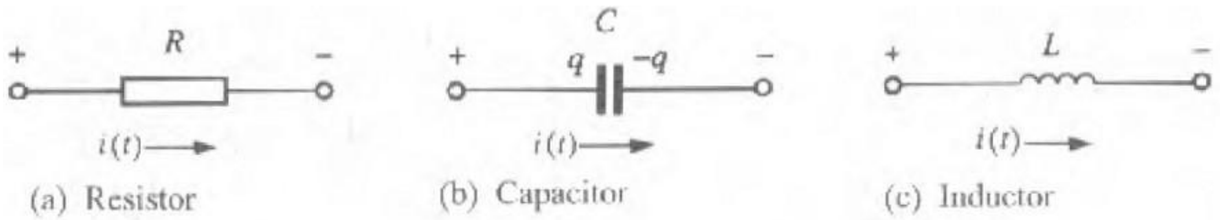

Figura 2: Representación de elementos básicos de un circuito eléctrico

IV. EJEMPLO: CIRCUITO RC

Ahora se mostrará un ejemplo de la resolución del circuito RC mostrado en la figura 3, compuesto por una fuente de voltaje ∈, un capacitor C, un resistor R y dos interruptores S1 y S2.

Se dejará abierto el interruptor S2, y antes de cerrar el interruptor S1 en el tiempo $t = 0$, tanto la carga en el capacitor como la corriente en la espira es nula. Planteando las reglas de Kirchhoff y aplicando la transformada de Laplace, se encontrarán expresiones para la carga en el capacitor $q(t)$ y la corriente en la espira $i(t)$ en función del tiempo, sabiendo que R=2000 Ω, C=0,005 F y ∈=10V.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito resulta:

$$i(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = \in$$

Usando (5) y reemplazando valores, obtenemos:

$$2000\frac{dq}{dt} + 200q = 10$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace usando (1), (2) y (3) en ambos miembros. Vamos a definir la transformada de $q(t)$ como: $Q(s) = \boldsymbol{\mathcal{L}}(q(t))$

$$2000[sQ(s) - q(0)] + 200Q(s) = \frac{10}{s}$$

Teniendo en cuenta que $q(0) = 0$ y despejando $Q(s)$ obtenemos:

$$(2000s + 200)Q(s) = \frac{10}{s}$$

$$Q(s) = \frac{0{,}005}{s(s + 0{,}1)}$$

Desarrollando en fracciones parciales da:

$$Q(s) = \frac{0{,}05}{s} - \frac{0{,}05}{s + 0{,}1}$$

Aplicando la anti-transformada de Laplace usando (3) y (4) obtenemos la carga del capacitor en función del tiempo

$$q(t) = 0{,}05(1 - e^{-0{,}1t}) \tag{6}$$

Usando (5) obtenemos la corriente en la espira en función del tiempo

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 0{,}005e^{-0{,}1t}$$

Como se ve en (6), en el instante inicial $q(0)$ la carga en el capacitor es nula, y cuando $t \to \infty$ la carga es máxima y vale $Qmax = 0{,}05\ F$ como se esperaba.

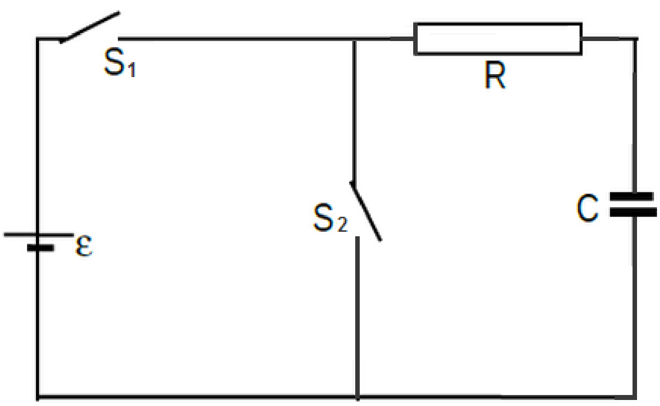

Figura 3: Circuito RC

Ahora se abrirá el interruptor S1 al mismo tiempo que se cierra el interruptor S2 en el tiempo $t = 0$, con lo cual se elimina la fuente ∈ del circuito y el capacitor se irá descargando a medida que pasa el tiempo. Ahora hallaremos $q(t)$ en función del tiempo sabiendo que la carga inicial del capacitor es máxima.
Planteando la segunda ley de Kirchhoff tenemos:

$$i(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = 0$$

Usando (5) y reemplazando valores, obtenemos:

$$2000\frac{dq}{dt} + 200q = 0$$

Aplicando la transformada de Laplace usando (1) y (2) y sabiendo que $q(0) = Qmax = 0{,}05\,F$ despejamos $Q(s)$

$$2000[sQ(s) - q(0)] + 200Q(s) = 0$$

$$Q(s) = \frac{100}{2000s + 200} = \frac{0{,}05}{s + 0{,}1}$$

Finalmente aplicamos la anti-transformada usando (4) y obtenemos la carga del capacitor en función del tiempo

$$q(t) = 0{,}05e^{-0{,}1t} \tag{7}$$

Como se ve en (7), en el instante inicial la carga es máxima ($q(0) = Qmax = 0{,}05$) y $q(t) = 0$ cuando $t \to \infty$.

V. PASOS PARA APLICAR LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EL ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En resumen, para resolver un circuito eléctrico con la transformada de Laplace hay que seguir los siguientes pasos:

1. Plantear las ecuaciones diferenciales correspondientes del circuito usando las leyes de Kirchhoff, donde las variables de las ecuaciones estarán en función de t

2. Aplicar la transformada de Laplace y convertir las ecuaciones al dominio s. Utilizar los datos conocidos de las condiciones iniciales del circuito (carga inicial, corriente inicial, voltaje inicial, etc.).

3. Resolver las ecuaciones haciendo manipulaciones algebraicas, despejando las funciones correspondientes (corriente, carga, voltaje, etc.).

4. Aplicar la anti-transformada a las funciones requeridas en función de s para obtenerlas en el dominio tiempo.

5. Para estar seguros de que las funciones obtenidas son correctas, podemos reemplazarlas en las ecuaciones planteadas en el punto 1 y ver si se verifican las igualdades.

REFERENCIAS

[1] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002, págs. 99-100, 130-131.
[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace#Propiedades, [acceso el 6 de agosto de 2013].
[3] G. Calandrini, *Tabla de transformadas de Laplace*.
[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kirchhoff, [acceso el 7 de agosto de 2013].
[5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Circuito, [acceso el 7 de agosto de 2013].