Análisis de circuitos de corriente alterna

Mauricio D. Muchico

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
maurimuchico@gmail.com
Agosto 2012

Resumen: En este informe se mostrará una de las aplicaciones del mapeo bilineal en el plano complejo, más específicamente la relación que existe entre la impedancia y la admitancia conforme la capacitancia del capacitor varía desde cero al infinito.

Palabras clave: mapeo bilineal, impedancia, admitancia, capacitancia, corriente alterna.

I. INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar el desarrollo de la presente nota de aplicación detallaremos brevemente algunos conceptos que serán de gran utilidad para comprender el núcleo central de la misma.

En primer lugar, es importante comprender que se entiende por transformaciones o mapeos en el plano complejo.

Si una función compleja w = f (z) está definida en una dominio D del plano z, entonces a cada punto de D le corresponde un punto en el plano w. De esta manera se tiene un mapeo, aplicación o transformación de D sobre el rango de valores de f (z) en el plano w, que se denomina imagen de D.

Estudiaremos tres tipos de transformaciones: lineal general, inversión y bilineal.

La transformación lineal general es una dilatación o contracción y una rotación, seguida de la una translación. La misma tiene la siguiente forma:

(1)

La inversión

(2)

es la composición de dos transformaciones:

- —, una inversión con respecto al círculo unitario
- , una reflexión con respecto al eje real.

Si , entonces

Y la transformación bilineal

(3)

donde *a, b, c y d* son constantes complejas y .

Cuando se reduce a una transformación lineal.

Cuando , la transformación admite la expresión:

$$- \quad \text{———} \quad (4),$$

la cual es una composición de tres transformaciones

$$, \qquad - \qquad y \qquad - \quad \text{——}$$

Por lo tanto una transformación bilineal siempre transforma círculos y rectas en círculos o rectas.

En segundo lugar, resulta interesante remarcar que el análisis de los circuitos de corriente alterna es una rama de la electrónica que permite el estudio del funcionamiento de los circuitos compuestos de resistores, capacitores e inductores con una fuente de corriente alterna.

Por último, continuando con lo que a la electrónica refiere, brindaremos a continuación un pequeño marco informativo sobre las nociones de impedancia, admitancia y capacitancia.

La impedancia es una magnitud que establece la relación (cociente) entre la tensión y la intensidad de corriente. Tiene especial importancia si la corriente varia con el tiempo, en cuyo caso, ésta, la tensión y la propia impedancia se describen con números complejos, como sigue:

$$(5),$$

donde R es la parte resistiva o real de la impedancia y X es la parte reactiva o imaginaria de la impedancia.

Cabe aclarar que el concepto de impedancia generaliza la ley de Ohm en el estudio de circuitos de corriente alterna.

La admitancia es el inverso de la impedancia:

$$- \qquad (6),$$

La conductancia y_c es la parte real de la admitancia y la susceptancia y_s la parte imaginaria de la admitancia.

Las unidades de la admitancia, la conductancia y la susceptancia son los Siemens. Un Siemen es el inverso de un Ohmio.

La capacitancia o capacidad eléctrica es la propiedad que tiene los cuerpos para mantener una carga eléctrica. La capacitancia también es una medida de la cantidad de energía eléctrica almacenada para un potencial eléctrico dado. El dispositivo más común que almacena energía de esta forma es el condensador. La relación entre la diferencia de potencial existente entre las placas del condensador y la carga eléctrica almacenada en este, se describe mediante la siguiente expresión:

$$- \qquad (7),$$

donde, C es la capacidad en faradios, Q es la carga eléctrica almacenada, medida en culombios, y V es la diferencia de potencial medida en voltios.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

En el circuito de la figura 1 deseamos encontrar la variación de la impedancia Z y la admitancia Y conforme la capacitancia C del capacitor varia de 0 a ∞.

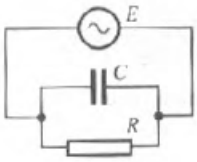

Figura 1: Circuito de corriente alterna

La ecuación (6) la podemos reescribir como

$$- \qquad (8)$$

realizando un manejo algebraico sobre (8) tenemos claramente que

$$\qquad (9)$$

La ecuación (9) puede ser interpretada como un mapeo bilineal con Z y C como las dos variables. Examinamos lo que pasa con el eje real en el plano C (C varia de 0 a ∞ y, por supuesto, es real) bajo el inverso del mapeo dado por (9).

Despejando C de (9) tenemos

$$\qquad (10)$$

Al tomar

$$\qquad (11)$$

Igualando las partes imaginarias y recordando que C es real, tenemos

$$(12)$$

que representa un circulo con centro en $-$ y radio $-$. Así el eje real en el plano C es mapeado en el círculo dado por (12) en el plano Z. Por supuesto, C es positivo. Si , (12) indica que . El círculo de la figura 1 confirma que, en este caso, la impedancia es R. Si entonces , así el eje real positivo en el plano es mapeado en el semicírculo superior o en el inferior.

Igualando las partes reales en (11) da

$$\qquad (13)$$

así que da , esto implica que el semicírculo inferior es la imagen en el plano Z del eje real positivo del plano C. Un diagrama como el de la figura 2 da una idea gráfica inmediata de cómo varia la impedancia Z conforme varia C.

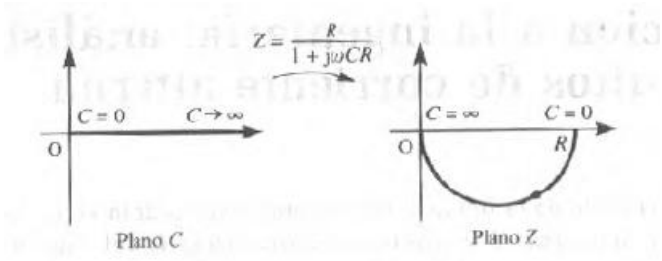

Figura 2: Mapeo para la impedancia Z

La admitancia – está dada por

– (14)

que representa un mapeo lineal como se muestra en la figura 3.

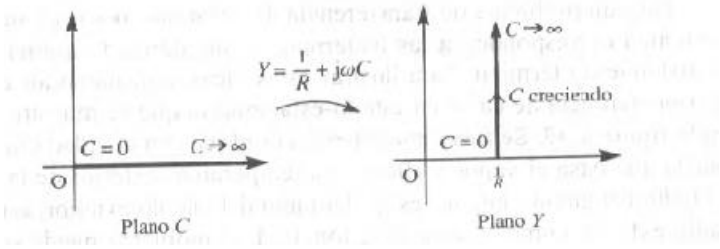

Figura 3: Mapeo para la admitancia Y

III. CONCLUSIÓN

En el presente informe se abordaron brevemente los conceptos de impedancia, admitancia y capacitancia; en el marco de las herramientas provistas en Funciones de Variable Compleja tales como mapeos en el plano complejo y sus graficas asociadas; las cuales sin lugar a dudas, ayudan en la comprensión del funcionamiento de los circuitos eléctricos.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja, UNS, 2012.

[2] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 31 de Julio de 2012].