Análisis complejo aplicado a la Teoría del Potencial Eléctrico

Mauricio W. Arce

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
mauricioarcew@gmail.com
Marzo 2013

Resumen: El siguiente informe forma parte del trabajo final de cursada de la materia Funciones de Variable Compleja. En el mismo se establecerán las bases y relaciones básicas para la resolución de la ecuación de Laplace, mediante métodos de análisis complejo que incluyen a las funciones complejas analíticas y al mapeo conforme, orientado al estudio de los campos electrostáticos.

Palabras clave: Ecuación de Laplace, funciones analíticas, mapeo conforme, potencial complejo.

I. INTRODUCCIÓN

En la física del siglo XIX, se creía que las fuerzas fundamentales de la naturaleza estaban regidas por "potenciales" que satisfacían la ecuación de Laplace. Se conocía en ese entonces a la Teoría de Potencial como el estudio de las funciones que podían servir como potenciales.

Hoy en día se sabe que la naturaleza es aún más complicada, pero sin embargo se sigue utilizando dicha ecuación para la resolución de problemas de campos gravitaciones, campos electrostáticos, conducción de calor de estado estacionario, dinámica de fluidos incomprensibles, etc.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A. *Ecuación de Laplace*

En el estudio de la electrostática se analizan técnicas para determinar la intensidad del campo eléctrico y potencial eléctrico debido a distribuciones de carga, generalmente distribuidas sobre superficies conductoras planas o cilíndricas, como así también para distribuciones puntuales. Sin embargo en muchos problemas prácticos no se conoce la distribución de carga exacta en todos los puntos, por lo que resulta bastante difícil encontrar una expresión para el campo y potencial.

Se plantean entonces problemas con "condiciones de frontera", es decir, se especifican las condiciones en la frontera conductor-espacio libre.

Se parte de la ecuación de Poisson, la cual establece la relación entre el potencial eléctrico (Φ) y la densidad de carga volumétrica (ρ_v) presente en un medio simple (de permitividad constante, $\epsilon = cte$).

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \tag{1}$$

En aquellos puntos del medio simple donde no hay cargas libres, es decir donde $\rho_v = 0$, (1) se reduce a lo que se conoce como la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{2}$$

B. Potencial Complejo

La ecuación de Laplace puede ser expresada en cualquier coordenada, dependiendo del problema en que se requiera resolverla. Particularmente para coordenadas cartesianas, considerando el caso bidimensional, obtenemos.

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0 \tag{3}$$

Una de las leyes de la electrostática indica que la fuerza eléctrica es perpendicular a las superficies equipotenciales (superficies de potencial constante, es decir Φ =cte), cuya dirección viene dada en un punto de la superficie como el gradiente del potencial eléctrico Φ. Para el caso bidimensional, las superficies se consideran como curvas equipotenciales en el plano XY. Si para un caso dado encontrásemos una solución adecuada a la ecuación de Laplace sobre algún dominio *D* entonces podemos decir que la solución $\Phi(x, y)$ es una función armónica, es decir una función de clase C^2 que satisface la ecuación de Laplace sobre el dominio *D.*

Teorema 1 *Si una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D, sus funciones componentes u y v son armónicas en D. Dichas funciones se llaman armónicas conjugadas.*

Del teorema anterior, si tomamos a la solución $\Phi(x, y)$ como la parte real de una función compleja analítica, entonces existe una única función real de dos variables, la cual es la conjugada armónica de Φ y notamos $\Psi(x, y)$.

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \tag{4}$$

Esta función *F(z)* se denomina Potencial Complejo la cual presenta dos ventajas a la hora de emplearla. Una ventaja técnica en relación con la aplicación de métodos de análisis complejo ya que resulta más fácil manipular una función compleja, que sus partes real e imaginaria por separado; también una ventaja física ya que las curvas de $\Psi = constante$ se intersectan con las líneas equipotenciales formando un ángulo recto, lo que nos da la información directa de la dirección de las líneas de fuerza eléctrica.

Un ejemplo simple de la aplicación del Potencial Complejo es determinar el potencial de un par de rectas que consideramos infinitas, con cargas opuestas de la misma intensidad en los puntos $z = c$ y $z = -c$, sobre el eje real.

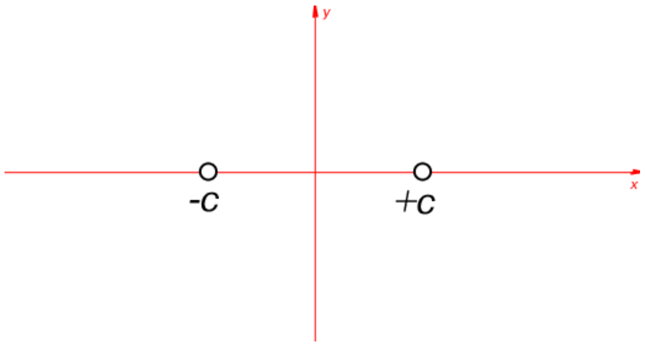

Figura 1 – Vista superior de las líneas de carga

Primeramente encontramos el potencial para una recta ubicada en el origen, la cual consideramos que se extiende hasta el infinito por ambos extremos y que se mantiene a un potencial constante. Resolviendo la ecuación de Laplace usando coordenadas cilíndricas obtenemos la siguiente expresión.

$$\Phi(r, \theta) = a.ln(r) + b$$

Donde los valores de *a* y *b* vienen determinados por el valor del potencial al que se mantiene la recta.

Entonces tomamos $\Psi(r,\theta) = a.Arg(z)$ como la función conjugada de $\Phi(r,\theta)$ y de este modo encontramos el potencial complejo correspondiente a una recta.

$$F(z) = a.ln(r) + b + i.a.Arg(z)$$

$$F(z) = a.Ln(z) + b \tag{5}$$

Aplicamos (5) al problema planteado para encontrar los potenciales complejos de las rectas.

$$F_1(z) = K.Ln(z-c) \qquad \text{y} \qquad F_2(z) = -K.Ln(z+c)$$

Donde la constante K mide la intensidad de carga, una opuesta de la otra. El potencial complejo de la combinación de las dos rectas fuetes viene dado por la suma de los potenciales complejos.

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = K[Ln(z-c) - Ln(z+c)] \tag{6}$$

Del cual podemos extraer casi directamente las expresiones de las líneas equipotenciales, como así también de las líneas de fuerza.

- Líneas equipotenciales:
  $$\Phi = Re\big(F(z)\big) = K.ln\left|\frac{z-c}{z+c}\right| = cte, \quad \text{es decir,} \quad \left|\frac{z-c}{z+c}\right| = cte$$

- Líneas de fuerza eléctrica:
  $$\Psi = Im\big(F(z)\big) = K.[Arg(z-c) - Arg(z+c)] = cte$$

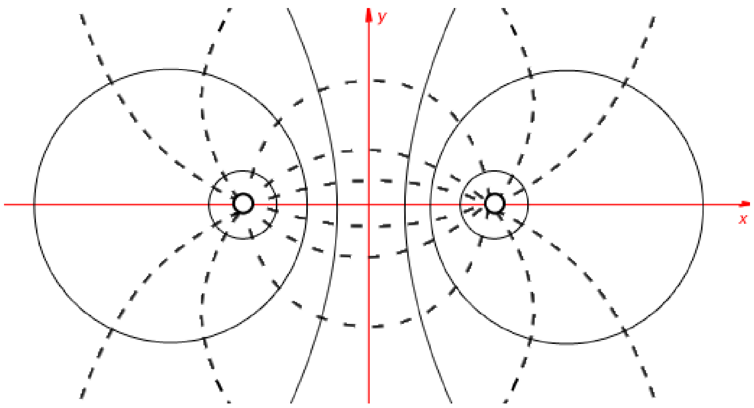

Figura 2 – Líneas equipotenciales (trazo continuo) y líneas de fuerza (trazo discontinuo)

C. Mapeo Conforme

Otra técnica de análisis complejo que ayuda a la resolución de problemas con valores de frontera de la ecuación de Laplace es el mapeo conforme, que se utiliza para transformar un dominio complicado en uno más simple, de manera tal de hallar más fácil la solución, la cual luego es mapeada de vuelta al dominio inicial.

La aplicación puede verse fácilmente en la transformación de la siguiente región.

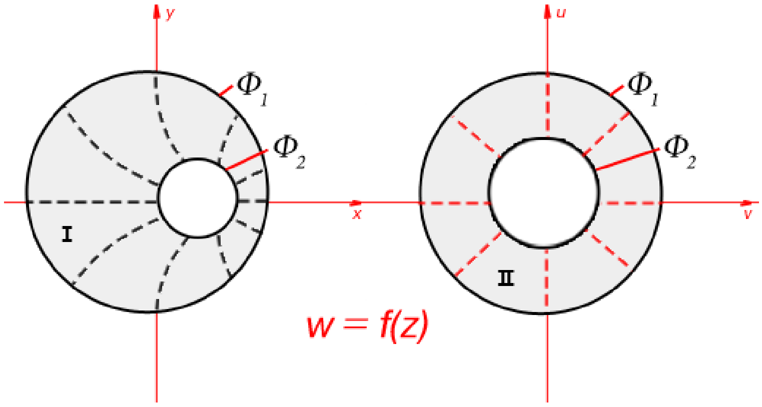

Figura 3 – Transformación de regiones

Se podría considerar el problema de dos cilindros no concéntricos, donde para hallar el potencial en la región que encierran ambos elementos podemos hacer la transformación del dominio I al dominio II, de forma tal de ahora considerar un problema de dos cilindros concéntricos.

D. Aplicación del potencial complejo en otras áreas

Tal como se indicó en la introducción, el potencial complejo es de mucha ayuda en la resolución de problemas de conducción de calor y dinámica de fluidos, donde la ecuación de Laplace se hace presente.

En problemas de flujo térmico se parte de la ecuación de calor, la cual expresa una relación diferencial entre la temperatura de cuerpo de algún material y el tiempo. Para casos estacionarios (es decir casos independientes del tiempo) bidimensionales, la ecuación de calor se reduce a la ecuación de Laplace.

Ecuación de calor: $\boldsymbol{T}_t = c^2\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{T}$

Reducción a la ecuación de Laplace: $\boldsymbol{\nabla}^2 T = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0$

En problemas de flujo bidimensional de fluidos ocurre lo mismo que el potencial eléctrico, donde las líneas de fuerza eléctrica se denominan líneas de corriente y como particularidad se establece la velocidad del fluido como el conjugado de la derivada del potencial complejo.

III. CONCLUSIÓN

Se concluye que la aplicación de métodos de análisis complejo desempeñan un papel muy importante en la resolución de problemas de potenciales. Si bien en este informe no se incluyen cálculos que van más allá de encontrar una conjugada armónica o realizar una transformación de una región a otra, existen otros procedimientos y cálculos relacionados con el potencial que implican el uso de integrales o series de potencias que derivan en un menor número de cuentas, considerando el potencial complejo.

REFERENCIAS

[1] E. Kreyszig, “Matemáticas avanzadas para ingeniería”, Limusa Wiley, vol 2.
[2] D. Cheng, “Fundamentos de electromagnetismo para ingenieria”, Pearson, 1998.
[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, artículo: “Teoría de Potencial”.