# Transformada de Laplace en resolución de circuitos eléctricos

Haure Matias

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación*
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*matihaure@gmail.com*

Agosto 2012

*Resumen*: En el presente documento se plantea como resolver circuitos eléctricos pasivos mediante la herramienta matemática transformada de Laplace. La cual nos da una resolución sencilla de una ecuación diferencial lineal. En particular en el documento se ilustra la resolución de circuitos eléctricos de segundo orden (RLC).

*Palabras clave*: ecuación diferencial lineal, transformada de Laplace, circuito RLC.

## I. INTRODUCCIÓN

En el artículo se presentara la manera en que es posible resolver un circuito eléctrico mediante la Transformada de Laplace. Debido que la misma es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales , con condiciones iniciales.

La ecuación diferencial que esta en el dominio del tiempo mediante la Transformada de Laplace pasan al dominio en campo s, dominio de Laplace. Una vez resuelto, efectuando las respectivas operaciones algebraicas, se aplica la Transformada Inversa de Laplace para obtener la respuesta en el domino del tiempo.

## II. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace es un ejemplo de una clase llamada transformación integral y toma una función f(t) de una variable t (a la cual nos referimos como tiempo) en una función F(s) de otra variable s (la frecuencia compleja) . Otra transformación integral usada ampliamente por los ingenieros es la transformada de Fourier , que también se vio en el curso de Funciones de Variable Compleja. La atracción de la transformada de Laplace es que transforma ecuaciones diferenciales en el dominio t (tiempo) en ecuaciones algebraicas en el dominio s (frecuencia). La resolución de ecuaciones diferenciales en el dominio t, por tanto, se reduce a resolver ecuaciones algebraicas en el dominio s. Habiendo hecho lo anterior para las incógnitas deseadas, sus valores como funciones del tiempo pueden ser encontrados al tomar la transformación inversa. Otra ventaja al usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales es que las condiciones iniciales juegan un papel esencial en el proceso de la transformación, asi están automáticamente incorporadas en la solución. Por lo tanto , es una herramienta ideal para resolver problemas con valor inicial tales como los que aparecen en la investigación de circuitos eléctricos.

### A. Definición y Notación

La **transformada de Laplace** de una función *f*(*t*) definida (en ecuaciones diferenciales, o en análisis matemático o en análisis funcional) para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función *F*(*s*), definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

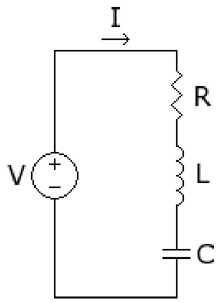
### B. Condiciones de Existencia

• f(t) es continua a tramos en $0 \leq t < \infty$.

• f(t) es de orden exponencial, f = O(eαt).

Entonces F(s) existe para Re(s) > α. Es decir la abscisa de convergencia β0 es menor o igual a α.

## III. CIRCUITO RLC (EN SERIE)




**Circuito sometido a un escalón de tensión**

Si un circuito RLC en serie es sometido a un escalón de tensión $E$, la ley de las mallas impone la relación:

$$E = u_C + u_L + u_R = u_C + L\frac{di}{dt} + R_t i$$

Introduciendo la relación característica de un condensador:

$$i_C = i = C\frac{du_C}{dt}$$

Se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden:

$$E = u_C + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + R_tC\frac{du_c}{dt}$$

Donde:

- *E* es la fuerza electromotriz de un generador, en voltios (V);
- $u_C$ es la tensión en los bornes de un condensador, en voltios (V);
- *L* es la inductancia de la bobina, en henrys (H);
- *i* es la intensidad de corriente eléctrica en el circuito, en amperios (A);
- *q* es la carga eléctrica del condensador, en coulombs (C);
- *C* es la capacidad eléctrica del condensador, en farads (F);
- $R_t$ es la resistencia total del circuito, en ohmios (Ω);
- *t* es el tiempo en segundos (s)

## IV. RESOLUCIÓN CIRCUITO RLC MEDIANTE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dado un circuito RLC formado por un resistor R , un capacitor C y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje e(t). Antes de cerrar el interruptor en el tiempo t-0, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Se determinara la carga q(t) en el capacitor y la corriente resultante i(t) en el circuito en el tiempo t sabiendo que R=160Ω, L=1 H. C=0.0001 F y e(t)=20V.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito se obtiene

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t)$$

O usando i=dq/dt,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

Sustituyendo los valores dados para L, R , C y e(t) da

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10^4 q = 20$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados llegamos a la ecuación

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = [sq(0) + \dot{q}(0)] + 160q(0) + \frac{20}{s}$$

donde Q(s) es la transformada de q(t).Estamos suponiendo que q(0)-0 y *q'(0)=0 y i(0)=0,* con lo que

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = \frac{20}{s}$$

esto es :

$$Q(s) = \frac{20}{s(s^2 + 160s + 10^4)}$$

Desarrollando en fracciones parciales da

$$Q(s) = \frac{\frac{1}{500}}{s} - \frac{1}{500}\frac{s + 160}{s^2 + 160s + 10^4}$$

$$= \frac{1}{500}\left[\frac{1}{s} - \left[\frac{s + \frac{4}{3}\times 60}{s^2 + 60^2}\right]_{s\to s+80}\right]$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso del primer teorema de traslación da

$$q(t) = \frac{1}{500}(1 - e^{-80t}\cos 60t - \tfrac{4}{3}e^{-80t}\operatorname{sen} 60t) \qquad (1)$$

Entonces, la corriente resultante en el circuito i(t) está dada por

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{3} e^{-80t} \operatorname{sen} 60t \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son la solución al problema planteado de modelo, las cuales representan la carga en el capacitor y la corriente eléctrica que circula por el circuito en un tiempo *t*.

## V. LEYES Y TEOREMAS UTILIZADOS

**Ley 1** *la suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada(o trayectoria) en un circuito es cero (segunda ley de Kirchoff).*

**Teorema 1** *Si f(t) es una función que tiene una transformada de Laplace F(s), con Re(s)>σ, entonces la función* $e^{at}f(t)$ *también tiene una trasformada de Laplace dada por:*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$$

## VI. CONCLUSIÓN

Se puede concluir que la transformada de Laplace es una herramienta matemática muy poderosa , que simplifica de forma notable la resolución de problemas que involucren ecuaciones diferenciales lineales.
Y es una herramienta mas que útil para aplicaciones ingenieriles del mismo tipo.

## REFERENCIAS


[1] G.Calandrini "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja".1er.Cuatrimestre 2012,pp.56-63.2012

[2] G.James , "Matematicas avanzadas para ingeniería" , International Thomson Editores, sexta edición 1997, pp. 131-143

[3] R. Resnick , "Fisica Vol.2 Version Ampliada" , Compañía Editorial Continental, tercera edición 1994, cap 39.

[4] Wikipedia, La enciclopedia libre, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace_en_circuitos [acceso 13 de agosto de 2012]

[5] Wikipedia, La enciclopedia libre, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Circuito_RLC [acceso 13 de agosto 2012]

[6] Wikipedia, La enciclopedia libre, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace [acceso 13 de agosto 2012]