Aplicación mediante Series de Fourier: Funciones Descriptivas

Matias N. Selzer

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
matiasns_@hotmail.com
Julio 2011

Resumen: En este artículo se estudian las series de Fourier y la aplicación de las mismas en un problema particular, el cual es, la función descriptiva.

Palabras clave: serie de Fourier, función descriptiva.

I. INTRODUCCIÓN

La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de periodo T puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo período T. El problema aparece naturalmente en astronomía, de hecho, Neugebauer descubrió que los Babilonios utilizaron una forma primitiva de las series de Fourier en la predicción de ciertos eventos celestiales.

La historia moderna de las series de Fourier comenzó con D' Alambert y su tratado de las oscilaciones de las cuerdas del violín. El desplazamiento $u = u(t,x)$ de una cuerda de violín, como una función del tiempo t y de la posición x, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad t > 0, \qquad 0 < x < 1$$

sujeto a las condiciones iniciales $u(t,0) = u(t,1) = 0$ para $t \geq 0$,$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$ para $0 < x < 1$. La solución de este problema es la superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas a la velocidad 1, como lo expresa la fórmula de D' Alambert:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\, f(x+t) + \frac{1}{2}\, f(x-t)\ ,$$

en la cual f es una función impar de periodo 2 que se anula en los puntos $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Euler en 1748 propuso que tal solución podía ser expresada en una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin n\pi x,$$

y como consecuencia

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \cos n\pi t \sin n\pi x\ .$$

Las mismas ideas fueron luego expuestas por D. Bernoulli y Lagrange. La formula

$$\hat{f}(n) = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x\, dx$$

para calcular los coeficientes apareció por primera vez en un artículo escrito por Euler en 1777.

La contribución de Fourier comenzó en 1807 con sus estudios del problema del flujo del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

presentado a la Académie des Sciences en 1822 y publicado en parte como la célebre Théorie analytique de la chaleur en 1822. Fourier hizo un intento serio por demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica. Una prubea satisfactoria de este hecho fue dada por Dirichlet en 1829. Riemann también hizo contribuciones importantes al problema.

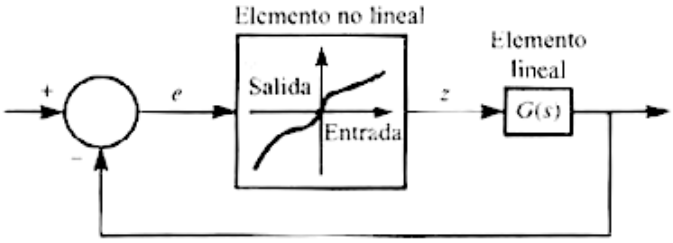
Modernamente el análisis de Fourier ha sido impulsado por matemáticos de la talla de Lebesgue, Hardy, Littlewood, Wiener, Frobenius, Selberg, Weil y Weyl entre otros.

II. APLICACIÓN

El poder extraordinario y la flexibilidad de las series y la transformada de Fourier se ponen de manifiesto en la asombrosa variedad de las aplicaciones que ellas tienen en diversas ramas de la matemática y de la física matemática, desde la teoría de números y geometría hasta mecánica cuántica. En esta sección presentamos una de las más importantes aplicaciones del análisis de Fourier: Funciones Descriptivas.

Funciones Descriptivas

Muchos sistemas de control que contienen un elemento no lineal pueden representarse mediante el siguiente diagrama de bloques:



Sistema de control no lineal

En la práctica las técnicas de la función descriptiva se usan para analizar y diseñar tales sistemas de control. Esencialmente, el método consiste en reemplazar la no linealidad por una ganancia *N* equivalente y después usa las técnicas desarrolladas para los sistemas lineales, tales como los métodos de respuesta de frecuencia. Si el elemento no lineal es sometido a una entrada senoidal $e(t) = X\, sen(\omega t)$ entonces su salida *z(t)* puede representarse por la expansión en serie de Fourier:

$$z(t) = \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t$$

$$= \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)$$

con

$$A_n = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y

$$\phi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$$

La **función descriptiva** *N(X)* del elemento no lineal está definida entonces como la razón compleja de la componente fundamental de la salida entre la entrada; esto es:

$$N(X) = \frac{A_1}{X}\, e^{j\phi_1}$$

con *N(X)* independiente de la frecuencia de la entrada ω si el elemento no lineal no tiene memoria.

Una vez determinada la función descriptiva, el comportamiento del sistema de lazo cerrado está determinado por la ecuación característica

$$1 + N(X)G(j\omega) = 0$$

Si se puede encontrar una combinación de *X* y ω de manera que satisfaga esta ecuación entonces el sistema es capaz de sostener oscilaciones en esa frecuencia y magnitud; esto es, el sistema exhibe un **comportamiento al ciclo límite**. En general, se puede encontrar más de una combinación y la oscilación resultante puede ser un ciclo límite estable o inestable.

Normalmente la ecuación característica investiga gráficamente dibujando *G(jω)* y *-1/N(X)*, para todos los valores de *X* en el mismo diagrama polar. Entonces el ciclo límite sucede a frecuencias y amplitudes que corresponden a los puntos de intersección de las curvas. Algunas veces los dibujos se pueden evitar calculando el valor máximo de *N(X)* y el valor de la ganancia asociada con *G(s)* que provocará que suceda el ciclo límite.

III. CONCLUSIÓN

En conclusión, podemos decir que la teoría que hay en el fondo de la materia Funciones de Variable Compleja no es muy complicada, y brinda incontables herramientas para el futuro en cualquier rama de la ingeniería.

En este caso, se ha analizado una de las tantas aplicaciones que se pueden realizar mediante la utilización de series de Fourier. Podemos apreciar que no es estrictamente necesario un conocimiento completo del tema para poder realizar esta, como otra de las aplicaciones, solo basta con poseer las fórmulas adecuadas y un leve conocimiento del tema en cuestión. Igualmente se recomienda un estudio más profundo del tema para un mejor entendimiento del mismo, según sea la necesidad.

REFERENCIAS

[1] Dym, H., McKean, H. P., Fourier Series and Integrals. Academic Press,New York, 1972.

[2] Kolmogorov, A. N., Fomín, S. V., Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial MIR, Moscú, 1972.

[3] Glyn James, “Matemáticas avanzadas para ingeniería, segunda edición”.

[4] Wikipedia, La enciclopedia libre, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 24 de julio de 2010].