Aplicación Funciones Armónicas: Corriente en un transistor de efecto campo

Matias S. De Pilato

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
msdepilato@gmail.com

Febrero 2013

Resumen: El informe da a conocer una de las aplicaciones del estudio de Funciones de Variable Compleja, en uno de los elementos más comunes del entorno de un Ingeniero Electrónico, el transistor de efecto campo. Mediante las Funciones Armónicas se puede armar un modelo teórico del comportamiento de este elemento para así lograr una mayor eficiencia en su investigación y aplicación.

Palabras clave: Funciones Armónicas, transistor de efecto campo.

I. INTRODUCCIÓN

El transistor de efecto campo (Field-Effect Transistor o FET, en inglés) es en realidad una familia de transistores que se basan en el campo eléctrico para controlar la conductividad de un "canal" en un material semiconductor. Los FET pueden plantearse como resistencias controladas por diferencia de potencial.

Tienen tres terminales, denominadas puerta (gate), drenador (drain) y fuente (source). El transistor de efecto de campo se comporta como un interruptor controlado por tensión, donde el voltaje aplicado a la puerta permite hacer que fluya o no corriente entre drenador y fuente.

Para nuestra aplicación tomaremos e campo magnético generado como una función $E_{(x,y)}$.

Como bases teóricas de la matemática aplicada diremos que par de funciones $u_{(x,y)}$ y $v_{(x,y)}$ de variables reales x e y que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Rieman se dicen que son funciones conjugadas; esto es

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde las derivadas primeras de $u_{(x,y)}$ y $v_{(x,y)}$ existen y son continuas.

Se dice que una función que satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones es armónica; esto es, $u_{(x,y)}$ es una función armónica si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

II. APLICACIÓN: CORRIENTE EN UN TRANSISTOR EFECTO CAMPO

Los campos (E_x, E_y) en un FET con compuerta aislada son armonicas conjugadas que satisfacen una condición de frontera no lineal. Para el transistor mostrado esquemáticamente en la figura 1 tenemos

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}, \; \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{-\partial E_x}{\partial x} \tag{3}$$

con condiciones

$$E_x = 0 \quad \text{en los electrodos} \tag{4}$$

$$E_x\left(E_y + \frac{V_o}{h}\right) = -\frac{I}{2\mu\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \text{en el canal} \tag{5}$$

$$E_y \to -\frac{V_g}{h} \qquad \text{con} \qquad x \to -\infty \; (0 < y < h) \tag{6}$$

$$E_y \to \frac{V_d - V_g}{h} \quad \text{con} \qquad x \to \infty \; (0 < y < h) \tag{7}$$

Donde V_o es una constante con dimensiones de potencial, h es el grosor del ailante, I es la corriente en el canal, que tiene que calcularse, μ , ε_0 y ε_r tienen sus significados usuales y los potenciales de compuerta V_g y drenaje V_d se toman con respecto a la fuente de potencial.

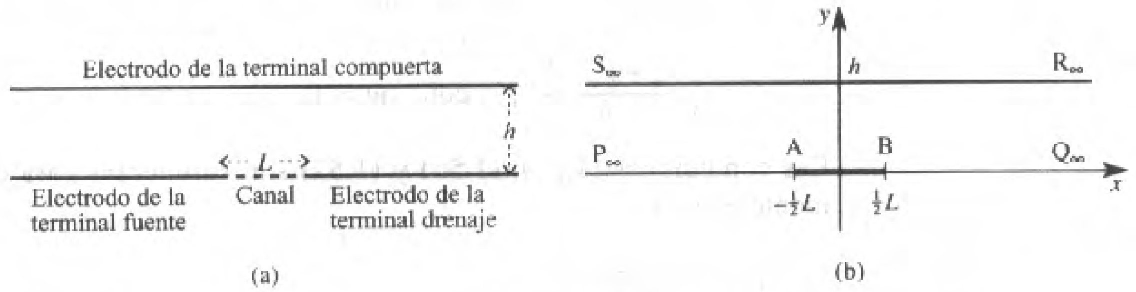

Figura 1 (a) Diagrama esquemático para un FET; (b) un sistema coordenada adecuado para la aplicación.

La clave para la solución de este problema es la observación de la condición de que la frontera no lineal

$$E_x\left(E_y + \frac{V_o}{h}\right) = -\frac{I}{2\mu\varepsilon_0\varepsilon_r} \tag{8}$$

contiene a la función armónica (ahora deE_x y E_y)

$$H(E_x, E_y) = 2E_x\left(E_y + \frac{V_o}{h}\right) \tag{9}$$

Una conjugada armónica de (19) es la función

$$G(E_x, E_y) = \left(E_y + \frac{V_o}{h}\right)^2 - {E_x}^2 \tag{10}$$

Como E_x y E_y son armonicas conjugadas con respecto a x e y, también lo son G y H. Así el problema puede ser formulado como el de encontrar las armonicas conjugadas G y H tales que

$$H = 0 \quad \text{en los electrodos} \qquad (11)$$

$$H = -\frac{I}{2\mu\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \text{en el canal} \qquad (12)$$

$$G \to \left(\frac{V_o - V_g}{h}\right)^2 \quad \text{con} \quad x \to \infty \ (0 < y < h) \qquad (13)$$

$$G \to \left(\frac{V_o + V_d - V_g}{h}\right)^2 \quad \text{con} \quad x \to -\infty \ (0 < y < h) \qquad (14)$$

Al utilizar la sucesión del mapeo que se indica en la figura 2, que puede convertirse en la formula simple

$$w = \frac{ae^{bz} - a^2}{ae^{bz} - 1} \qquad (15)$$

Donde $a = e^{bL\Omega}$ y $b = \pi/h$, el problema se ha transformado para encontrar las funciones armonicas conjugadas G y H (en el plano w) tales que

$$H = 0 \quad \text{sobre } v = 0 \ (u > 0) \qquad (16)$$

$$H = -\frac{I}{\mu\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \text{sobre } v = 0 \ (u < 0) \qquad (17)$$

$$G \to \left(\frac{V_o - V_g}{h}\right)^2 \quad \text{con} \quad w = e^{bL} \qquad (18)$$

$$G \to \left(\frac{V_o + V_d - V_g}{h}\right)^2 \quad \text{con} \quad w = 1 \qquad (19)$$

Las condiciones (16), (17) y (19) son suficientes para determinar completamente H y G

$$H = -\frac{I\, arg(w)}{\pi\mu\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad (20)$$

$$G = \frac{I\, ln|w|}{\pi\mu\varepsilon_0\varepsilon_r} + \left(\frac{V_o + V_d - V_g}{h}\right)^2 \qquad (21)$$

Mientras que la condición (18) determina el valor de I

$$I = \frac{\mu\varepsilon_0\varepsilon_r}{Lh} + \left(2V_o - 2V_g + V_d\right)V_d \qquad (22)$$

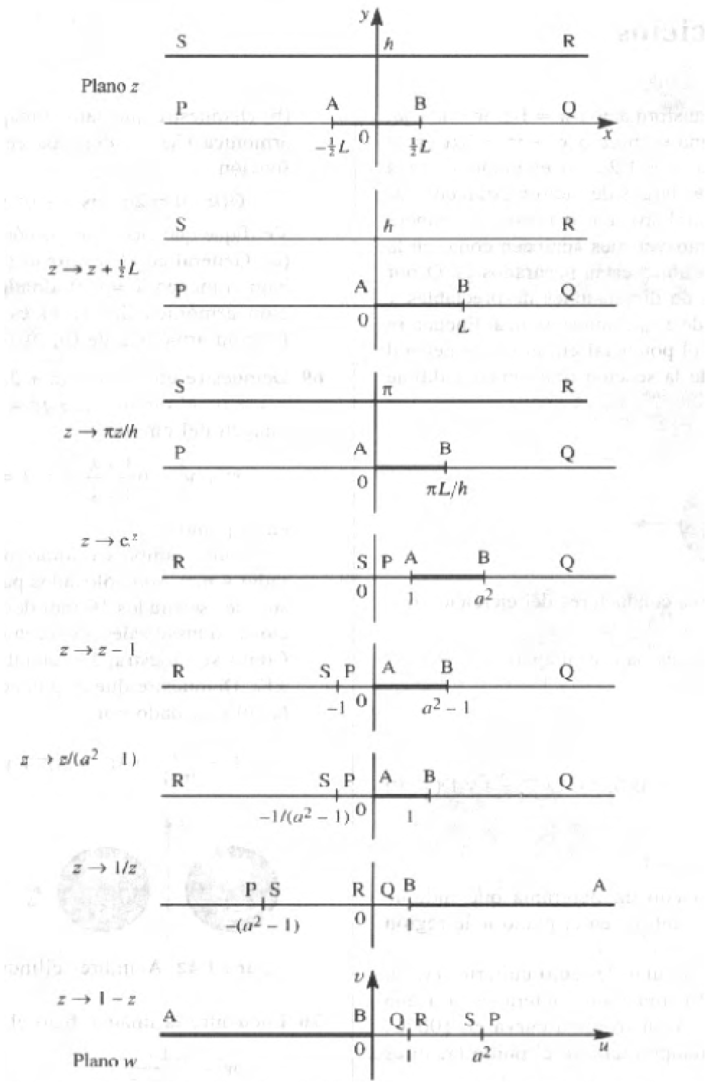

Figura 2 Secuencia de mapeos para simplificar el problema.

III. Conclusión

En conclusión, la matemática estudiada en Funciones de Variable Compleja nos permite desarrollar distintos modelos teóricos de elementos físicos comunes para un Ingeniero Electrónico. Estos modelos son de gran utilidad puesto que se pueden realizar los ensayos de los elementos infinidad de veces sin la necesidad de arriesgarlos a una posible destrucción.

A medida que nos internamos en el estudio matemático, nuestros modelos pueden reproducir infinidad de casos, esto nos abre una gran cantidad de caminos en el campo investigativo.

Referencias

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.
[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transistor_de_efecto_campo, [acceso el 24 de febrero de 2013.
[3] Prof. Guillermo Calandrini, Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja, 2do. cuatrimestre 2012.