Aplicación de las Transformaciones de Laplace en sistemas de control realimentados

Dardo Maximiliano Martínez

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
mdm_nqn@hotmail.com
Marzo 2011

Resumen: En este informe se mostrará una de las aplicaciones, en ingeniería de las transformaciones de Laplace, en síntesis, se intentará explicar cómo realizar los cálculos matemáticos en sistemas o procesos a lazo cerrado (realimentados), que darán como resultado, información sobre la estabilidad de los amplificadores operacionales, en un primer apartado, y la relación entre la salida y la entrada de un sistema, encargado de controlar motores y/o servomotores, en un segundo apartado.

Palabras clave: amplificadores operacionales, sistemas de control, transformada de Laplace, diagrama de bloques, motor/servomotor, ceros, polos, estabilidad.

I. INTRODUCCIÓN

Resulta importante, antes de adentrarse en los temas centrales de este informe, dar algunas definiciones, con el objetivo de facilitar la comprensión de conceptos, que serán mencionados en los apartados II y III.

De este modo se prosigue por definir que un sistema o proceso es un conjunto de componentes que actúan de forma coordinada para realizar una determinada función. Si se actúa de forma manual o automática sobre dicho sistema, para alcanzar un cierto fin, entonces estaremos en presencia de un proceso controlado.

Un sistema de control puede ser a lazo abierto o lazo cerrado (realimentado), este último consiste en tomar una muestra de la señal entregada por un dispositivo en su salida, a través de una red apropiada denominada red de muestreo, esta señal de realimentación es devuelta para ser comparada con la fuente de señal exterior mediante una red mezcladora o sumadora. Mientras que si el proceso se realiza a lazo abierto, o sin realimentación, simplemente la señal que se obtiene a la salida no es devuelta a un sumador en la entrada.

En cualquier sistema físico, en el cual, el comportamiento entre la relación entrada/salida queda definido a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales, son posibles de aplicar las transformaciones de Laplace para estudiar su funcionamiento, al conectarlos a otros subsistemas, para conseguir un fin determinado.

II. TRANSFORMADA DE LAPLACE EN AMPLIFICADORES OPERACIONALES

En este apartado, se estudiará la estabilidad de los amplificadores operacionales realimentados, para ello, se aplicarán las transformaciones de Laplace en las funciones, que son relación, entre la señal de entrada y salida del sistema (función de transferencia), con la finalidad de obtener la información de sus ceros y polos.

A. Aplicación de la transformada de Laplace en un modelo a lazo abierto

El método de Laplace consiste, básicamente, en transformar las ecuaciones diferenciales del sistema.

Para poder estudiar los modelos realimentados resulta importante, primero, tener algunas nociones de los sistemas en bucle abierto de amplificadores operacionales, para ello, analizaremos el caso más común, donde hay una sola entrada e(t) y una sola salida r(t), de las que se obtienen las funciones transformadas E(s) y R(s) respectivamente. En este caso, el sistema de ecuaciones diferenciales se puede reducir a una sola ecuación:

$$R(s) = H(s)\,E(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}E(s) \tag{1}$$

Y su equivalente en diagrama se puede apreciar en la figura 1.

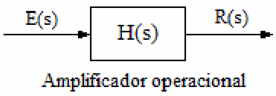
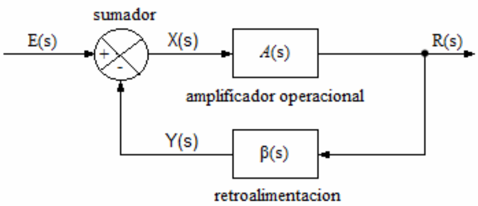


Figura 1. Diagrama de bloques para la ecuación “(1)”

Aquí H(s) es la función de transferencia del sistema. P(s) y Q(s) son polinomios y E(s) es normalmente una función racional.

B. Aplicación de la transformada de Laplace en un modelo a lazo cerrado

Dado que, como se indicó al comienzo de este apartado, nuestro objetivo es el estudio de la estabilidad particularizada al caso de amplificadores operacionales, para esto, nos plantearemos el siguiente problema: dada una función de proceso $A(s)$ y una realimentación $\beta(s)$, figura 2, ambas con polos conocidos, estudiar la estabilidad del sistema realimentado.



La figura X. Diagrama de bloques de un amplificador realimentado negativamente

En el cual E(s) y R(s) resultan ser las funciones transformadas de Laplace de la señal de entrada y salida, respectivamente, en función del tiempo.

Y(s) es la transformada de la señal q se toma de la salida, para ser “inyectada” nuevamente a la entrada; y X(s) resulta de la mezcla de la señal de entrada y la proveniente de la red de realimentación.

Mientras que el bloque de la función de proceso $A(s)$ consta de un amplificador operacional y el bloque $\beta(s)$, debido a sus condiciones de red pasiva, suele estar formada por resistencias, condensadores o bobinas.

En este tipo de sistemas de lazo cerrado, la función de transferencia queda dada por la relación entre la señal de salida y la señal de entrada:

$$M(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{A(s)}{1 + A(s)\beta(s)} \quad (2)$$

Función en la cual, sus polos serán los ceros de su denominador $1 + A(s)\,\beta(s)$.

Los polos de su numerador $A(s)$, que potencialmente también podrían agregarse, se cancelarán en realidad con los polos $1 + A(s)\,\beta(s)$, ya que coinciden con éstos (salvo si $\beta(s)$ tuviera ceros coincidentes con polos de $A(s)$. En conclusión, la estabilidad de $M(s)$ puede estudiarse determinando si $1 + A(s)\,\beta(s)$ tiene ceros en el semiplano real positivo, Re(s) > 0. Para ello, se aplicara el principio de variación del argumento:

$$N = Z - P \quad (3)$$

Donde Z son los ceros y P son los polos de F, encerrados por una curva C en el plano complejo, siendo:

$$F(s) = 1 + A(s)\beta(s) \quad (4)$$

Y N son las veces que circunda al origen el contorno C' = F(C) (transformada de C a través de F).

Si partimos de la suposición razonable de que $A(s)$ y $\beta(s)$ son estables, entonces F(s) no tendrá polos con parte real positiva, por lo tanto, es decir, el número de vueltas que dará C’ = F(C) alrededor de 0 coincide con el número de ceros de F(s) dentro de C. Si este número es mayor que 0, habrá por lo menos un cero y el sistema realimentado será **inestable**.

III. APLICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES DE LAPLACE PARA CONTROLAR SERVOMECANISMOS.

En este apartado, lo que se hará, será mostrar la aplicación de la transformada de Laplace en un sistema de lazo cerrado, encargado de controlar un motor o servomotor, muy utilizado, por ejemplo, en industrias y en robótica en particular.

A. Diagrama de bloques

En la figura 3, puede apreciarse que se aplica una señal de referencia, (r), que en este caso, es un cierto valor de tensión en corriente continua, la cual pasa por un sumador, del que se desprende una señal de error (e) correspondiente a la diferencia entre la señales de referencia y de salida del sistema, esta es “inyectada” a un mecanismo controlador (PID), que puede ser diseñado con amplificadores operacionales, encargado de disminuir dicho error, de esta manera, la tensión que se la aplicará al motor, o servomotor, será la señal de control, (u). Por último, a la salida será censada una señal, (y), que mediante la retroalimentación se envía devuelta a la entrada del controlador.

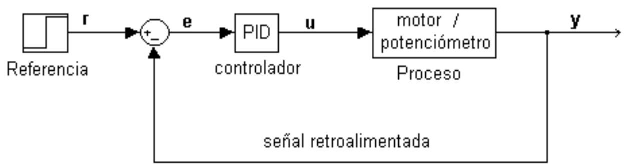


Figura 3. Diagrama de bloques del sistema controlado

B. Modelo matemático

La función de transferencia de se define como la relación entre la salida y la entrada de un sistema en el dominio de Laplace, y asumiendo condiciones iníciales nulas.

Basándonos en la definición de la función de transferencia, aplicaremos una señal escalón al sistema, graficaremos la salida, hallaremos las ecuaciones de cada variable en el dominio del tiempo, las llevamos al dominio de Laplace, y la relación salida/entrada será el modelo matemático del mismo.

Para poder estudiar esta relación; mediante una experiencia de mediciones, se aplicará un pulso de tensión, en corriente continua, al bloque de proceso, luego se medirá la diferencia de potencial, en un cierto intervalo de tiempo, a un potenciómetro conectado al motor, para de esta manera, obtener una señal a la salida de pendiente m y función:

$$y(t) = mt \tag{5}$$

Cuya transformada Laplace será:

$$Y(s) = \frac{m}{s^2} \tag{6}$$

La señal de entrada corresponde a una señal escalón de amplitud igual a la del voltaje de corriente continua (c.c.) aplicado:

$$u(t) = V \tag{7}$$

Cuya transformada Laplace será:

$$U(s) = \frac{V}{s} \tag{8}$$

El modelo matemático, será la función de transferencia del sistema, es decir:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{m/V}{s} \tag{9}$$

El modelo obtenido, por lo tanto no presenta ceros y tiene un polo en el origen, lo que representa un sistema del tipo 1.

La figura 4, muestra nuestro sistema en lazo cerrado sin controlador, donde G(s) es la función de trasferencia del conjunto motor/potenciómetro y H(s) es la función de transferencia del lazo de retroalimentación, que en nuestro caso es unitaria.

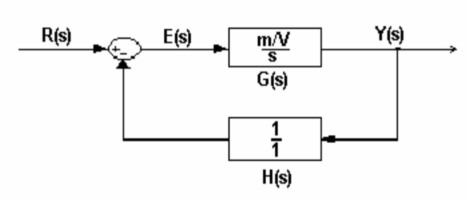


Figura 4. Diagrama de bloque del sistema en lazo cerrado sin controlador

Donde la ecuación de error queda dada por:

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) \qquad (10)$$

Y por lo tanto, como H(s)=1, de la ecuación "(9)" y "(10)" se tiene:

$$E(s)=\frac{1}{1+\frac{m/V}{s}}R(s) \qquad (21)$$

Si la entrada es un escalón de amplitud "V" (la transformada de Laplace de la función escalón, es V/s), el error en estado estacionario será:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{m/V}{s}}\frac{V}{s} \qquad (12)$$

El error de la ecuación "(12)" tenderá a cero, esto quiere decir que el sistema de lazo cerrado responderá ante una orden de ubicación en cualquier posición angular, con gran exactitud.

REFERENCIAS

[1] J. Pérez, A. Hilario, M. A. Castro, F. Mur, F. Yeves y J. Peire, "*Simulación y Electrónica Analógica: Prácticas y Problemas*", Ra-Ma, 318-4, jul. 1998.

[2] "*Introducción al control de procesos*", unidad 1.

[3] F. Miyara, "*Estabilidad de Amplificadores Realimentados*", Electrónica III, *Universidad Nacional de Rosario*, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Escuela de Ingeniería Electrónica, Departamento de Electrónica, Riobamba 245 bis, Rosario, Argentina, http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3, Segunda Edición, 2005.

[4] J. A. Contreras, "*Introducción a la Implementación de Controladores PID Análogos*", Armada, República de Colombia, Escuela Naval Almirante Padilla, Cartagena, [en línea], mar. 2006, disponible en http://www.automatas.org/hardware/teoria_pid.htm,
[Consultada el 12 de marzo de 2011].