

Fourier y el procesamiento digital de señales

Martin Carrizo

Estudiante de ingeniería electrónica

Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina

Carrizo.03.93@gmail.com

Junio 2014

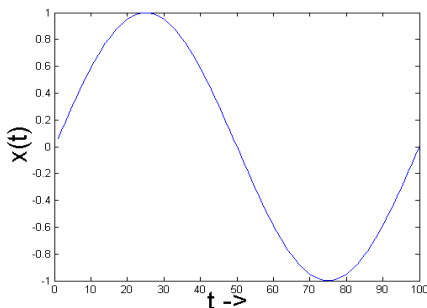
Resumen: Se mostrara uno de las aplicaciones de las series y transformadas de Fourier, más específicamente en el procesamiento digital de las señales.

El análisis de Fourier nos permite expresar señales periódicas como una suma infinita (serie) de senos y cosenos. La importancia de esto radica en que nos facilita el trabajo del manejo con señales, ya que para que nosotros podamos procesar estas señales es necesario expresarlas como una combinación lineal de términos, lo cual nos lo proporciona la serie y la transformada de Fourier.

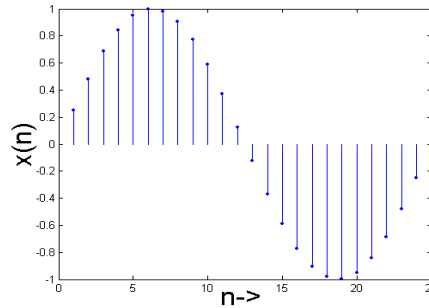
Palabras clave: Series de Fourier; transformadas de Fourier, procesamiento de señales digital.

I. INTRODUCCIÓN

Es importante tener en cuenta la diferencia que existe entre una señal analógica y una digital para comprender mejor el procesamiento de señales, el nombre de una señal analógica se debe a que es análoga a la señal que la representa. La magnitud de una señal analógica puede tomar cualquier valor, esto es, la amplitud de una señal analógica muestra una variación continua sobre su campo de actividad. Una forma alternativa de representación de señal es la de una secuencia de números, cada uno de los cuales representa la magnitud de señal en un instante determinado. La señal resultante se llama señal digital, está a diferencia de la señal analógica es una señal que esta discretizada en el tiempo y cuantificada en magnitud.



Señal continua



Señal discreta

II. PROCESAMIENTO DE SEÑALES

El procesamiento digital de señales o DSP (sigla en inglés de *digital signal processing*) es la manipulación matemática de una señal de información para modificarla o mejorarla en algún sentido. Este está caracterizado por la representación en el dominio del tiempo discreto, en el dominio frecuencia discreta, u otro dominio discreto de señales por medio de una secuencia de números o símbolos y el procesado de esas señales.

La Series Fourier y la Transformada de Fourier resultan útiles para estos fines ya que permiten ver la distribución de frecuencias de la señal, esto discretiza la señal permitiendo que se almacenen digitalmente los valores de frecuencias para cada tiempo determinado, luego mediante un DAC (siglas de “Digital-to-Analog Converter”, conversor digital a analógico en inglés) se leen estos datos y se logra reproducir la señal original.

III. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE TRABAJAR CON UNA SEÑAL DIGITAL

Ventajas:

- La señal discreta (digital) es más fácil de transmitir, almacenar o manipular.
- La señal digital es menos sensible que la analógica a las interferencias
- La señal digital puede ser enviada a casi cualquier punto del planeta en cualquier momento a un muy bajo costo a través de internet y a partir de aquí puede ser reenviada a su remitente o a algún otro destino. Esto sin que la señal sufra variaciones o alteraciones de calidad severas.

Desventajas:

- Se necesita una conversión analógica-digital previa y una decodificación posterior, en el momento de la recepción.
- Hay una pérdida inherente de información al convertir la información continua en discreta. Por mínimo e insignificante que resulte siempre hay un error de cuantificación que impide que la señal digital sea exactamente equivalente a la analógica que la originó.

IV. SERIE DE FOURIER Y TRANSFORMADA DE FOURIER

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras)

Las series de Fourier tienen la forma:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t \right]$$

Donde a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de Fourier que toman los valores:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2n\pi}{T}t \right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \left(\frac{2n\pi}{T}t \right) dt.$$

Por la identidad de Euler, las fórmulas anteriores pueden expresarse también en su forma compleja:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T}t}.$$

Y para el caso de funciones no periódicas que cumplan ser continuas a tramos en todo intervalo finito, tengan derivada a derecha e izquierda en todo punto y que sean absolutamente integrables se pueden representar mediante la Integral de Fourier (IF), se muestra en este caso la forma compleja ya que es más reducida:

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} dt$$

Donde

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Es la transformada de Fourier de $f(t)$, aplicación que para cada punto del espacio de t le hace corresponder un punto en el espacio de frecuencias de ω .

Aplicar estas operaciones a una señal permite ver como distribuyen las diferentes frecuencias que la componen. Esto permitiría manipular la señal de entrada de manera más sencilla, pues su distribución frecuencia es una función discreta y no continua.

En resumen:

- Las series de Fourier nos permiten obtener el espectro de frecuencia de señales continuas y periódicas.
- La transformada de Fourier nos permite obtener el espectro de frecuencias de señales aperiódicas.

V. CONCLUSIONES

Es fundamental el conocimiento de las series de Fourier y su transformada, para poder trabajar con algo tan cotidiano como son las ondas, ya que sin estas herramientas matemáticas no se podrían obtener los datos necesarios para su digitalización y su posterior procesamiento.

Referencias:

- [1] G. Calandrini, “Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de variable compleja”.
- [2] ABC Matemático [internet] disponible en <http://abcmatematico.blogspot.com.ar/> [Acceso 12/08/2014]
- [3] Wikipedia [internet] disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Procesamiento_digital_de_se%C3%B1ales [Acceso 14/08/2014].
- [4] Julio Medina “Análisis de Fourier para el tratamiento de señales”<http://es.slideshare.net/docdigitus/analisis-de-fourier-para-seales#> [Acceso 11/08/2014].
- [5] Teoría de la comunicación [internet] disponible en <http://www.ctv.es/USERS/carles/PROYECTO/cap1/cap1.html> [15/08/2014].