Circuitos R.L.C

Martín I. Altube

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Martin_17altube@hotmail.com
Julio 2012

Resumen: En el presente artículo se procederá a obtener la corriente en un circuito RLC, alimentado por c.a., mediante la resolución de la ecuación diferencia correspondiente al mismo, haciendo uso de transformada de Laplace.

Palabras clave: RLC, c.a, Laplace.

I. INTRODUCCIÓN

Como se mencionó anteriormente, se realizara la resolución de una ecuación diferencial, en particular la perteneciente a un circuito RLC alimentado con corriente alterna de la forma A*Sin[wt], mediante el uso de transformada de Laplace y anti-transformada para obtener la corriente en función del tiempo (I(t)).

Utilizo este método de resolución ya que creo que es más simple, para resolver ecuaciones diferenciales, en comparación a los métodos aprendidos en otros cursos, que necesitan una mayor cantidad de fórmulas y solo sirven para tipos muy acotados de ecuaciones.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

Ley 1 *La suma algebraica de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla del circuito debe ser igual a cero.[1]*

Planteando la Ley 1 (Kirchhoff) al circuito de la figura 1 se obtiene la siguiente ecuación.

$$V_o \sin(wt) = \frac{Q}{C} + L\frac{dI(t)}{dt} + I(t) \tag{1}$$

$$Q = \int_0^t I(t)\, dt \tag{2}$$

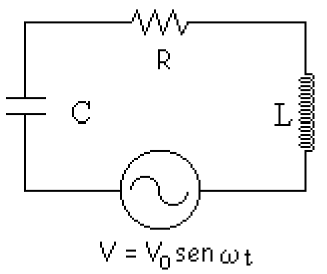

Figura 1: Representación de un circuito RLC con corriente variable

Reemplazando (2) en (1) se obtiene

$$V_o \sin(wt) = \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt + L\frac{dI(t)}{dt} + I(t)R \quad (3)$$

Aplicado Transformada de Laplace a (3)

$$\mathcal{L}(V_o \sin(wt)) = \mathcal{L}(\frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt + L\frac{dI(t)}{dt} + I(t)R) \quad (4)$$

Llamando F(s) a $\mathcal{L}$(I(t)), de (4) resultaría

$$F(S) = \frac{V_0 * W * S}{(S^2+W^2)(LS^2+RS+\frac{1}{C})} \quad (5)$$

Suponiendo que los valores de R=50 Ω, L=10 H y C=0.001 F

Propiedad 1. $\mathcal{L}(\int_0^t f(u) * g(t-u)du\ ) = F(s) * G(s)$

Aplicando la propiedad 1 como la anti-transformada a (6), completando cuadrados y tomando los valores supuestos de R, C y L se procede a obtener f(u) y g(u)

$$f(u) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{1}{10}}{\left(S+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{39}{4}}) \quad (6)$$

Propiedad 2. $\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right) = F(s-a)$

Por la propiedad 2 (6) se convierte en

$$f(u) = e^{-\frac{u}{2}}\mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{1}{10}}{S^2+\frac{39}{4}}) \quad (7)$$

$$f(u) = \frac{e^{\frac{-u}{2}} * \sin\frac{\sqrt{39}}{2}u}{5\sqrt{39}} \quad (8)$$

$$g(t-u) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{V_0 * W * S}{S^2+W^2}) \quad (9)$$

$$g(t-u) = V_0 * W * \cos(W(t-u)) \quad (10)$$

Ahora utilizando la propiedad 1

$$I(t) = \frac{V_0 * W}{5\sqrt{39}}\int_0^t e^{\frac{-u}{2}} \sin(\frac{\sqrt{39}}{2}t) * \cos\left(W(t-u)\right)\ du \quad (11)$$

Propiedad 3. $\cos\left(W(t-u)\right) = \cos(W * t) * \cos(W * u) + \sin(W * t) * \sin(W * u)$

Utilizando la propiedad 3 y reemplazando en (11) y utilizando el método de integración por partes varias veces se obtiene la siguiente expresión para la corriente

$$I(t) = \frac{-V_0 * w * e^{\frac{-t}{2}}}{10\sqrt{39}(100 - 19w^2 + w^4)}\left(-\sqrt{39} * (-10 + w^2) * \mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{39}}{2} * t\right] + (10 + w^2) * \mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{39}}{2} * t\right]\right) + \tag{12}$$

$$\frac{-V_0 * w}{1000 - 190w^2 + 10w^4}((-10 + w^2)\mathrm{Cos}[t * w] - w * \mathrm{Sin}[t * w])$$

Graficando esta expresión para valores de Vo=1000 [V] y W=$\frac{3}{2}\pi$ se obtiene el grafico que se encuentra a continuación

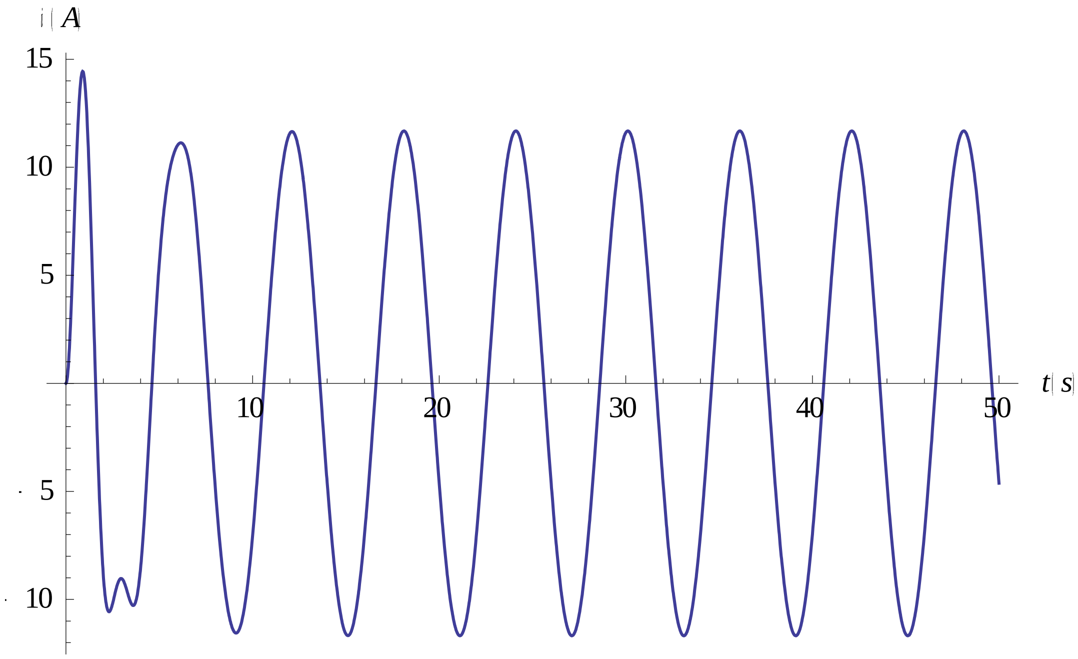

Figura 2: Representación de la corriente en función del tiempo, grafico realizado con Wolfram Mathematica 8

REFERENCIAS

[1] P. Tipler, y G. Mosca, "Física para la ciencia y la tecnologia", Volumen 2a cap. 25, Ed. Reverté, 2003.

[2] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

[3] J. Edminister, "Teoría y problemas de circuitos eléctricos", McGraw-Hill 1969

[4] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja", 2012.

[5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki /Gustav_Kirchhoff, [acceso el 11 de julio de 2012].