Método Fourier para el análisis de las formas de onda

Mariano Andrés Dus

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Mariano_madl@hotmail.com
Marzo 2011

.

Resumen: En este informe, se estudiará una de las aplicaciones de la asignatura Funciones de Variables Complejas. La aplicación a estudiar es, "Método Fourier para el análisis de las formas de onda", la cual es muy utilizada en ingeniería electrónica y eléctrica, ya que las señales o formas de onda, ocupan un lugar importante a la hora de diseñar y analizar circuitos. Se tendrá en cuenta la parte teórica como la práctica, demostrados en ejemplos.

Palabras clave: formas de onda, método de Fourier, circuitos.

I. INTRODUCCIÓN

En algunos de los circuitos que se ven a lo largo de la carrera de ingeniería electrónica, como por ejemplo los que contienen elementos tales como resistencias, inductancias y capacitores, las respuestas se obtienen de las excitaciones que tienen forma constante o senoidal. Así v = constante o v = Vsen (wt), y se puede observar en las figuras 1(a), 1(b).

Ciertas formas de onda periódicas, como por ejemplo la de la figura 1(c) (dientes de sierra), pueden definirse por funciones únicas sólo localmente. De este modo, el diente de sierra se expresa por f(t)= (V/T)t en el intervalo 0<t<T y por f(t)=(V/T)(t - T) en el intervalo T<t<2T. Aunque las expresiones anteriores describen la forma de onda, no permiten determinar la respuesta del circuito.

Si se expresa una función periódica como la suma de un número finito o infinito de funciones senoidales, la respuesta de redes lineales a excitaciones no senoidales puede determinarse mediante la aplicación del teorema de superposición. El método Fourier proporciona los medios para solucionar esta clase de problemas.

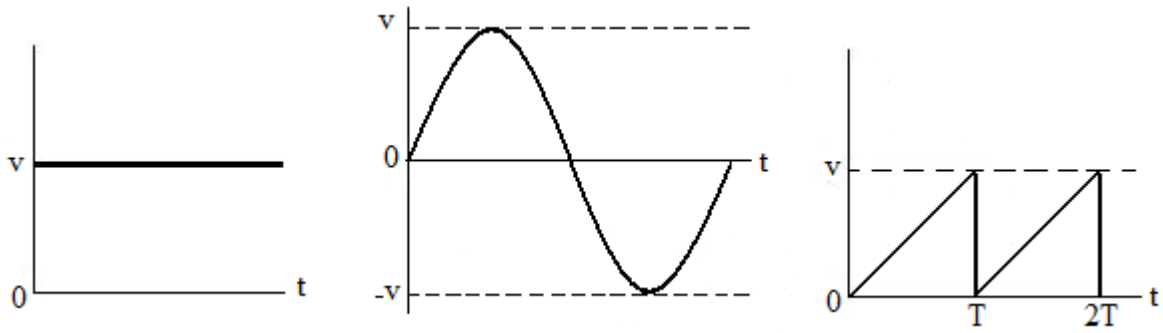

Figura 1: (a),(b),(c)

II. SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Cualquier forma de onda periódica, puede expresarse con las series de Fourier siempre que:

a) Si es discontinua, solo habrá un número finito de discontinuidades ene l periodo T;
b) Tiene un valor promedio finito en el periodo T;
c) Tiene un número finito de máximos positivos y negativos en el periodo T;

Si estas condiciones, llamadas condiciones de Dirichlet, se satisfacen, existen las series de Fourier y pueden escribirse en la forma trigonométrica:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos wt + a_2 \cos 2wt + a_3 \cos 3wt + \cdots$$

$$+ b_1 \ sen\, wt + b_2 \, sen\, 2wt + b_3 \, sen\, 3wt + \cdots \quad (1)$$

Los coeficientes de Fourier, a y b, se determinan para una forma de onda dada por la evaluación de integrales. Para los coeficientes de los cosenos, la integral de evaluación se obtiene multiplicando ambos miembros de (1) por cos nwt e integrando sobre un periodo completo. 2π/w es el periodo de la fundamental.

$$\int_0^{2\pi/w} f(t) \cos\ nwt\ dt\ = \int_0^{2\pi/w} \tfrac{1}{2}\ a_0 \cos\ nwt\ dt + \int_0^{2\pi/w}\ a_1 \cos\ wt \cos\ nwt\ dt + \cdots$$

$$+ \int_0^{2\pi/w}\ a_n\, cos^2\, nwt\, dt + \cdots + \int_0^{2\pi/w}\ b_1 \,\text{sen}\ wt \cos\ nwt\ dt$$

$$+ \int_0^{2\pi/w}\ b_2 \,\text{sen}\, 2wt \cos\ nwt\ dt + \cdots \quad (2)$$

Las integrales definidas en el segundo miembro de (2) son todas cero, excepto la que involucra el cos nwt al cuadrado, el cual tiene el valor (π/w)a_n. Por lo tanto:

$$a_n = \frac{w}{\pi} \int_0^{2\pi/w} f(t) \cos\ nwt\ dt = \frac{2}{L} \int_0^T f(t) \cos\ \frac{2\pi nt}{L}\ dt \quad (3)$$

Al multiplicar (1) por sen nwt e integrar, como arriba se indica, se obtiene la integrar del coeficiente del seno.

$$b_n = \frac{w}{\pi} \int_0^{2\pi/w} f(t) \,\text{sen}\ nwt\ dt = \frac{2}{L} \int_0^T f(t) \,\text{sen}\ \frac{2\pi nt}{L}\ dt \quad (4)$$

Las integraciones se realizan de −L/2 a L/2, de $-\pi$ a +π, o sobre cualquier otro periodo completo que pueda simplificar el cálculo

III. Serie exponencial compleja de Fourier.

Los términos en seno y coseno de la serie trigonométrica, se pueden expresar por sus equivalentes exponenciales. Para no hacer extensa la explicación matemática, a continuación se muestra la expresión de la serie exponencial de Fourier:

Por la entidad de Euler:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ e^{-inx}\, dx$$

IV. Simetría de formas de onda.

Para funciones periódicas, hay condiciones de simetría, que ayudan a la hora de hacer cálculos, ya que se pueden establecer la existencia o no de algunos términos de la serie de Fourier.

- Función impar: f(x) = − f(−x), solo tienen términos en senos, por lo tanto:
  $a_0 = a_1 = 0$ y c_n es imaginario puro
- Función par: f(x)= f(−x), solo tienen términos en cosenos y la constante, por lo tanto:
  $b_n = 0$ y c_n es real.
- Simetría de media onda: f(x)= −f(x−L). Resulta que:
  $a_0 = 0$, para n par (n=2k) → $a_{2k} = b_{2k} = 0$

V. APLICACIONES AL ANÁLISIS DE CIRCUITOS.

Los términos de una serie de voltajes pueden aplicarse a una red lineal y obtener los términos armónicos correspondientes de la serie de corrientes. Estos términos se obtienen mediante superposición. Por lo tanto se puede considerar cada término de la serie de Fourier representando el voltaje como una fuente única, la cual se observa en la figura (2).

La impedancia equivalente de la red a cada frecuencia armónica nw se utiliza para calcular la corriente hacia esa armónica. La suma de las respuestas individuales es la respuesta total i, en forma de serie, al voltaje aplicado.

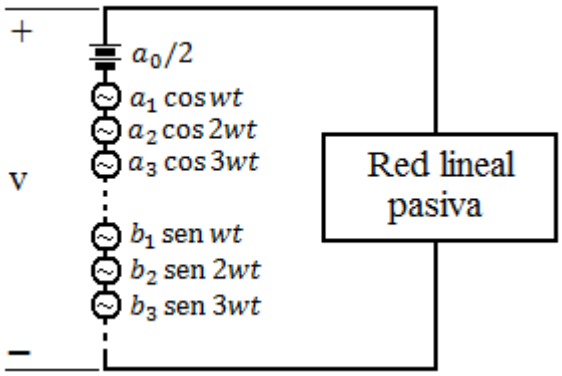

Figura (2).

Ejemplo: Un circuito RL en serie en el cual R=5Ω y L=20mH (figura 3) tiene un voltaje aplicado de v=100+50 sen wt + 25 sen 3wt (V), con w=500 rad/s. Encuéntrese la corriente y la potencia promedio. Calcúlese la impedancia equivalente del circuito a cada frecuencia encontrada en la función de voltaje. Después obténgase las corrientes respectivas.

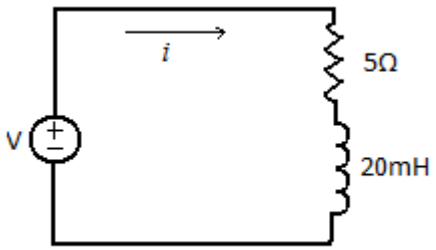

Figura (3).

A ω =0, $Z_0 = R = 5\Omega$ $I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{100}{5} = 20\ A$

A ω =500 rad/s, $Z_1 = 5+j(500)(20x10^{-3}) = 11.15 \angle 63{,}4°\ \Omega$

$$i_1 = \frac{V_{1max}}{Z_1}\ sen\ (\omega t - \theta_1) = 4.48\ sen\ (\omega t - 63.4°)\ (A)$$

A $3\omega = 1500\ rad/s$ $\quad Z_3 = 5+j30 = 30.4 \angle 80{,}54°\ \Omega$,

$$i_3 = \frac{V_{3max}}{Z_3}\ sen\ (3\omega t - \theta_3) = 0.82\ sen\ (3\omega t - 80.54°)\ (A).$$

La suma de las corrientes armónicas es la respuesta total requerida; es una serie de Fourier.

$$i = 20 + 4.48\ sen\ (\omega t - 63.4°) + 0.82\ sen\ (3\omega t - 80.54°)\ (A)$$

Esta corriente tiene el valor efectivo

$$I_{ef} = \sqrt{20^2 + \left(\frac{4.48^2}{2}\right) + \left(\frac{0.82^2}{2}\right)} = \sqrt{410.6} = 20.25\ A$$

Lo cual resulta en una potencia en el resistor de $\quad P = I_{ef}^2.R = (410.6)5 = 2053\ W$

Para verificar se calcula la potencia promedio total, calculando primero la potencia contribuida por cada armónica y sumando entonces los resultados.

$En\ \omega = 0 \rightarrow P_0 = V_0 I_0 = 2000\ W$
$En\ \omega = 500\ rad/s \rightarrow P_1 = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos\theta_1 = 50.1\ W$
$En\ 3\omega = 1500\ rad/s \rightarrow P_3 = \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos\theta_3 = 1.69\ W$

$Entonces\ P = P_0 + P_1 + P_3 = 2052\ W$

Otro método: La expresión en series de Fourier para el voltaje a través del resistor es

$$v_R = Ri = 100 + 22.4\ sen\ (\omega t - 63.4°) + 4.11\ sen\ (3\omega t - 80.54°)\ (V)$$
$$V_{Ref} = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22.4^2) + \frac{1}{2}(4.11^2)} = \sqrt{10259} = 101.3\ V$$

Entonces la potencia suministrada por la fuente es $P = V_{Ref}^2 / R = 2051\ W$

En el ejemplo anterior, el voltaje impulsor se dio como una serie trigonométrica de Fourier en t, y los cálculos se hicieron en el dominio del tiempo. (Se usó la impedancia compleja solamente para abreviar; Z_n y θ_n se pudo haber obtenido directamente de R, L, y n.) En cambio, si el voltaje se representa por una serie exponencial de Fourier,

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} V_n\, e^{jn\omega t}$$

Entonces se procede con una superposición de fasores V_n (y girando contra el sentido de las manecillas del reloj si n<0), y después se aplican los métodos del dominio de frecuencia.

REFERENCIAS

[1] Joseph A. Edminister. *Circuitos Eléctricos*, Mc Graw-hill, 1985.

[2] Wikipedia. *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier , [acceso el 24 de marzo de 2011].

[3] G. Calandrini, *Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variables Compleja*, 2do cuatrimestre 2010.