Transformada de Laplace: Control de proceso a un sistema mecánico

Marianela De Benedictis

Estudiante de Ingeniería Electrónica/ Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
marianeladb89@gmail.com

Marzo 2013

Resumen: el objetivo de este trabajo es desarrollar el método de transformada de Laplace en un sistema real. Para esto, es necesario considerar modelos dinámicos, es decir, variables respecto al tiempo. Esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferenciales respecto al tiempo para representar matemáticamente el comportamiento de tal sistema. Debido a la gran variedad de aplicaciones, solo se desarrolla un ejemplo de control de proceso dentro del área de la mecánica.

Palabras clave: Laplace, sistema real, mecánica, aplicación.

I. MARCO TEÓRICO

La transformada de Laplace es una técnica matemática la cual está definida por medio de una integral impropia y cambia una función en una variable de entrada en otra función en otra variable. Ésta, puede ser usada para resolver ecuaciones diferenciales lineales y ecuaciones integrales, en general se aplica a problemas con coeficientes constantes. Un requisito adicional es el conocimiento de las condiciones iniciales de la función.

Se define a dicha transformada mediante la siguiente expresión:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Aquí, la letra s representa una nueva variable, que para el proceso de integración se considera constante, así convierte una función en t en una función en la variable s. Las condiciones para la existencia de la transformada de una función: de orden exponencial y continua a tramos.

A pesar que por definición se debe resolver una integral, existen propiedades que hacen más fácil la resolución de la ecuación. De la misma manera sucede con transformadas básica que se encuentran tabuladas.

Cuando se resuelven ecuaciones diferenciales usando la técnica de la transformada, se cambia una ecuación diferencial en un problema algebraico, resumiendo el problema a encontrar una función en la variable independiente que tenga una cierta expresión como transformada.

II. INTRODUCCIÓN

En años recientes, los sistemas de control han asumido un papel cada vez más importante en el desarrollo y avance de la civilización moderna y la tecnología. Esto ha surgido a la necesidad de evaluar el problema y obtener la optima solución teniendo en cuenta los siguientes aspectos: Incremento de la productividad, Alto costo de mano de obra, Seguridad, Alto costo de materiales, Mejorar la calidad, Reducción de tiempo de manufactura, Reducción de inventario en proceso, Certificación (mercados internacionales), Protección del medio ambiente (desarrollo sustentable).

A pesar de que esta transformada tiene orígenes hacia fines del siglo XVIII, recién hacia principios del siglo XX, se convirtió en una herramienta común de la teoría de vibraciones y de la teoría de circuitos, dos de los campos donde ha sido aplicada con más éxito.

Así, se puede representarse, de manera aproximada, el comportamiento dinámico de los procesos en la naturaleza, por el siguiente modelo general de comportamiento dinámico lineal:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n - 1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \ldots\ldots + a_0 . y(t) = x(t)$$

En este informe, se desarrollará esta técnica a partir de un sistema mecánico con los componentes básicos de resortes y amortiguación, para concluir con el estudio de control de proceso mediante la función de transferencia, la cual a través de un cociente relaciona la respuesta de un sistema a una señal de excitación. Permite obtener la respuesta temporal, la respuesta estática y la respuesta en frecuencia; el análisis de distintas descomposiciones de la primera permite tomar útiles nociones cualitativas: efecto de las condiciones iniciales, respuesta libre y forzada, regímenes permanentes y transitorios y concepto central de estabilidad para obtener un primer criterio de investigación.

III. CONTROL DE PROCESO DE UN SISTEMA MECÁNICO

Se desea obtener un control de proceso al sistema de la figura (1), el cual es de carácter mecánico y consta, básicamente, de dos cuerpos en un recinto interactuando con resortes y amortiguación. Para esto, se sabe que la ley fundamental que controla los sistemas mecánicos es la segunda Ley de Newton, la cual se aplica a todo sistema de este estilo.

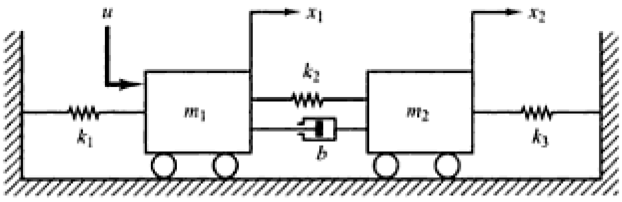

Figura 1 – Sistema Mecánico

III.1. IMPLEMENTACIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se comenzará planteando las ecuaciones que corresponden al comportamiento de este sistema:

$$m_1 . \frac{dx_1^2}{dt^2} = -k_1 . x_1 - k_2 . (x_1 - x_2) - b . \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + u_{(t)} \tag{1}$$

$$m_2 . \frac{dx_2^2}{dt^2} = -k_3 . x_2 - k_2 . (x_2 - x_1) - b . \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) \tag{2}$$

Siendo m_1 y m_2 las masas de los cuerpos analizados; k_1, k_2 y k_3 las constantes de los respectivos resortes; x_1 y x_2 las funciones de posición y $u_{(t)}$ la función de excitación.

Al simplificar, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$m_1 . \frac{dx_1^2}{dt^2} + b . \frac{dx_1}{dt} + (k_1 + k_2) . x_1 = b . \frac{dx_2}{dt} + k_2 . x_2 + u_{(t)} \tag{3}$$

$$m_2 . \frac{dx_2^2}{dt^2} + b . \frac{dx_2}{dt} + (k_2 + k_3) . x_2 = b . \frac{dx_1}{dt} + k_2 . x_1 \tag{4}$$

Al aplicar la transformada de Laplace a estas últimas dos ecuaciones, se consigue:

$$m_1.s^2 + b.s + (k_1 + k_2).X_{1(s)} = (b.s + k_2)X_{2(s)} + U_{(s)} \tag{5}$$

$$m_2.s^2 + b.s + (k_2 + k_3).X_{2(s)} = (b.s + k_2)X_{1(s)} \tag{6}$$

III.2. FUNCIONES TRANSFERENCIA DEL SISTEMA Y DIAGRAMA DE BLOQUE

Por último, para obtener una noción de la relación que existe entre la entrada y excitación del sistema, se plantean las funciones de transferencia.

Si de la ecuación (6) se despeja $.X_{2(s)}$, se remplaza en la ecuación (5) y luego se despeja la relación de cociente entre $X_{1(s)}$ y $U_{(s)}$, se podrá obtener la función de transferencia para $X_{1(s)}/U_{(s)}$

$$G_{(s)} = \frac{X_{1(s)}}{U_{(s)}} = \frac{m_2.s^2 + b.s + k_2 + k_3}{(m_1.s^2 + b.s + k_1 + k_2)(m_2.s^2 + b.s + k_2 + k_3) - (b.s + k_2)^2} \tag{7}$$

De manera similar se procede con $X_{2(s)}/U_{(s)}$

$$G_{(s)} = \frac{X_{2(s)}}{U_{(s)}} = \frac{b.s + k_2}{(m_1.s^2 + b.s + k_1 + k_2)(m_2.s^2 + b.s + k_2 + k_3) - (b.s + k_2)^2} \tag{8}$$

Estas funciones están ligadas a la representación de diagrama de bloques, como se muestra en la figura (2), que es una representación grafica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo del impulso. Estos diagramas muestran las relaciones existentes entre los diversos componentes. La ventaja que tiene esta representación es la de indicar de forma más realista del comportamiento del sistema real.

Figura 2 – Elemento de un diagrama de bloque

IV. CONCLUSIÓN

En este informe se pretende exponer la importancia del método de transformada de Laplace debido a su versatilidad con los innumerables sistemas que se pueden analizar. Es una herramienta que además de ser adaptable, brinda una facilidad que es resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas, simplificando enormemente obtener una solución al sistema, ya que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división.

REFERENCIAS

[1] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.
[2] G. Calandrini, *Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja*.
[3] Katsuhiko Ogata, *Ingeniería de control moderna, 4ta ed.*
[4] http://www.mty.itesm.mx/dcic/deptos/m/Paginas/MateParaTodos/e07/Aplicaciones_reales_Laplace.ppt
[5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki
[6] http://www.edutecne.utn.edu.ar/transf-laplace/transformada%20de%20laplace.pdf
[7] http://www.dea.icai.upco.es/ramon/Ra4/RA2.pdf
[8] www.frlp.utn.edu.ar/materias/control/laplace