Transformada de Laplace en las deflexiones de una viga

Marco Zanotti

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda.Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Marco.zanotti15@gmail.com
Mayo 2015

Resumen: En este informe veremos como la Transformada de Laplace nos resulta de utilidad a la hora de aplicarla en el estudio de las deflexiones de una viga.
Esta herramienta matemática es muy útil para el análisis de sistemas dinámicos lineales, procediendo así, a diseñar y analizar los sistemas de control de manera más sencilla.
Utilizando la transformada para resolver las ecuaciones diferenciales que surgen del equilibrio de tensiones de cada punto del material que compone la viga, analizaremos deflexiones transversales.

Palabras claves: deflexiones, Transformada de Laplace, viga, sistemas dinámicos lineales.

I. INTRODUCCIÓN

En principio describiremos la herramienta matemática a utilizar para el análisis de nuestros sistemas, la Transformada de Laplace($\mathcal{L}$):

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

donde $f(t)$ es una función real definida para los $t \geq 0$ y la variable s pertenece a los números complejos. Si la $\mathcal{F}(s)$ existe, la misma converge para $Real(s) > s_0$.

En lo siguiente vamos a describir el elemento a analizar, denominado de gran importancia en áreas como la arquitectura y la ingeniería(principalmente), siendo este un segmento de hierro o madera(en menos ocasiones) el cual brinda un refuerzo en la estructura de las construcciones, por lo general en la parte del techo. Es un elemento horizontal en el que predomina su longitud por sobre sus otras dos dimensiones.

La viga es un sólido que no se puede deformar, pero a la hora de su estudio se permiten ciertas excepciones las cuales nos sirven para hallar el esfuerzo de flexión, el cual provoca tensiones de tracción y compresión, produciéndose las máximas en el cordón inferior y superior respectivamente, las cuales se calculan relacionando el momento flector y el segundo momento de inercia.

Finalmente, vamos a plantear una ecuación diferencial en la cual su incógnita va a ser la curva de deflexión que se genera en una viga al apoyarle cargas puntuales conociendo su estado inicial y final, y viendo cómo estas actúan en la misma. Para resolver esta ecuación, vamos a proponer el método de la Transformada de Laplace, facilitándonos así, el desarrollo del problema.

II. DEFLEXIONES TRANSVERSALES DE UNA VIGA APOYADA SOBRE 2 PUNTOS

Vamos a considerar una viga de longitud L, medida en la coordenada X del sistema de ejes cartesianos, desde $x = 0$ hasta L.

Aplicando la teoría de la elasticidad al estudio de las deflexiones transversales a una viga, tenemos la ecuación

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

donde $y(x)$ se relaciona con el desplazamiento de la viga en la posición de Y; la constante E es el módulo de Young de elasticidad de la viga; I es el momento de inercia de un corte transversal de la viga, que suponemos constante y $q(x)$ es una función generalizada que modela la carga solicitante.

El modelo de viga que vamos a analizar, requiere del uso de la siguiente ecuación, la cual nos va a proporcionar el momento flector en cada sección de la viga

$$EIy''(x) = M(x) \qquad (1)$$

Estudiaremos ahora, la flexión de una viga de carga uniforme de c Newtons por metro de longitud y una carga de b Newtons concentrada en su punto medio (véase la Figura 1). Consideramos las fuerzas que aparecen sobre el segmento OP de la viga, éstas son:

a) una fuerza hacia arriba en O igual a la mitad del peso total, es decir $a = \frac{cl+b}{2}$ Newtons,

b) una fuerza de cx Newtons que podemos suponer concentrada en el punto ($\frac{x}{2}$,$y(\frac{x}{2})$),

c) además, cuando $\frac{l}{2} \leq x \leq 1$ entra en juego la fuerza de módulo b en el punto medio de la viga, a $x - \frac{l}{2}$ metros de P.

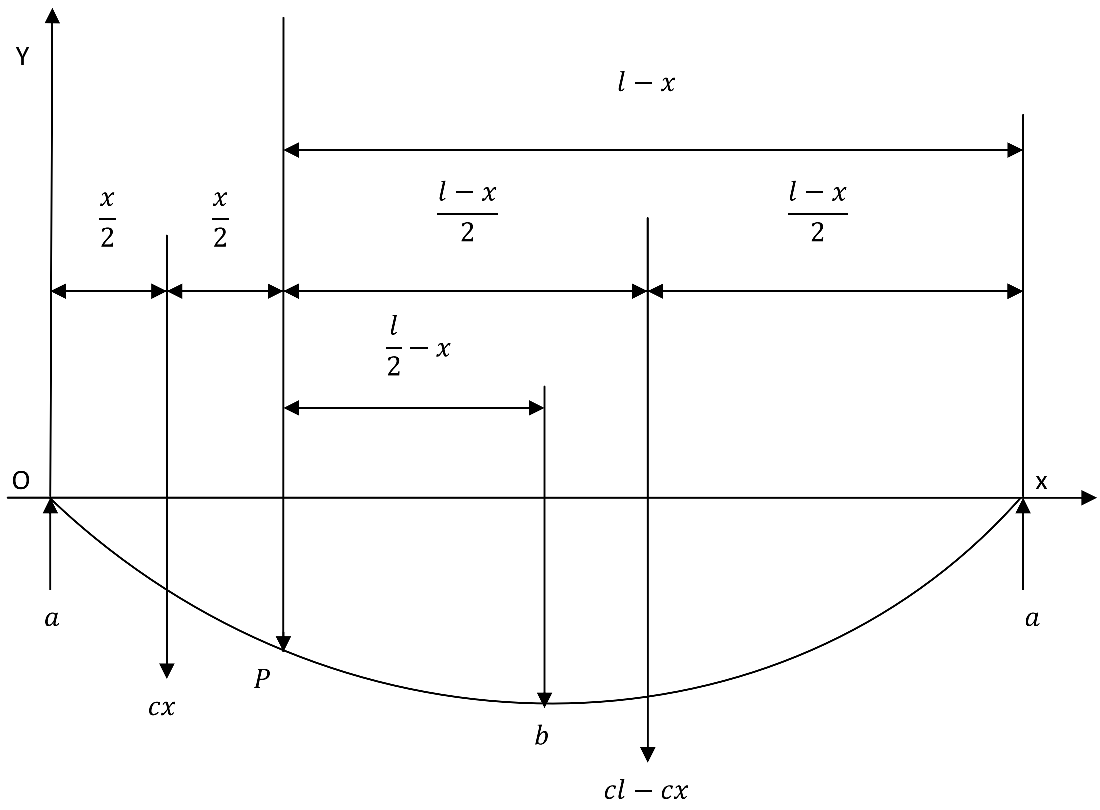

Figura 1: Viga apoyada sobre dos puntos

Por lo visto, el momento flector en P será:

$$M_1 = \frac{cl+b}{2}x - cx\frac{x}{2} = \frac{cl+b}{2}x - c\frac{x^2}{2}\text{ , si } x \leq \frac{l}{2}$$

y

$$M_2 = \frac{cl+b}{2}x - cx\frac{x}{2} - b(x - \frac{l}{2}) = \frac{bl}{2} + \frac{cl-b}{2}x - c\frac{x^2}{2}\text{, si } x \geq \frac{l}{2}$$

Pero podemos adoptar una notación conjunta para el momento flector, de la siguiente manera

$$M_i = \frac{clx}{2} - \frac{cx^2}{2} + (-1)^i\frac{b}{2}(x - \frac{l}{2}) + \frac{bl}{4},$$

ahora reemplazando en (1), obtenemos

$$EIy''(x) = \frac{clx}{2} - \frac{cx^2}{2} + (-1)^i\frac{b}{2}(x - \frac{l}{2}) + \frac{bl}{4} \qquad (2)$$

aplicamos la Transformada de Laplace en toda la ecuación (2)

$$EI(S^2Y(s) - SY(0) - Y'(0)) = \frac{cl}{2S^2} - \frac{c}{S^3} + (-1)^i(\frac{b}{2S^2} - \frac{l}{2S}) + \frac{bl}{4S} \qquad (3)$$

anti-transformando la ecuación (3) llegamos finalmente al resultado

$$EIy(x) = \frac{clx^3}{12} - \frac{cx^4}{24} + (-1)^i\frac{b}{12}(x - \frac{l}{2})^3 + \frac{bl}{8}x^2 + ex + d$$

con las condiciones de contorno $y(0) = 0 (i = 1)$, y $y(l) = 0 (i = 2)$, tenemos que

$$d = \frac{bl}{24} \text{ y } e = \frac{cl^3 - bl^2 - 2}{24}$$

III. CONCLUSIÓN

En este informe pudimos mostrar el poder que tiene la Transformada de Laplace, en una de sus tantas aplicaciones, en este caso en especial, la deflexión de una viga.

Al estar cursando la materia "Funciones de Variable Compleja", pudimos ver la facilidad con la que resolvíamos sistemas dinámicos lineales, planteando y resolviendo una ecuación diferencial.

Es considerable saber que un problema tan importante, como el correcto funcionamiento de una viga(en este caso), parta de un análisis tan sencillo que nos entregue información tan relevante para saber cómo actuó de acorde al material del cual está constituida , dónde tuvo su punto de deflexión, el peso que puede soportar, etc.

REFERENCIAS

[1] Facultad de Ingeniería Universidad de Buenos Aires, [internet], disponible en http://materias.fi.uba.ar/6110M/monografias/AM3%20Murmis%20Monograf%C3%ADa%20-%20Aplicaci%C3%B3n%20de%20la%20Transformada%20de%20Laplace%20al%20estudio%20de%20las%20vibraciones%20en%20una%20viga.pdf, [acceso el 31 de Mayo de 2015].
[2] Tecnológico de Monterey, [internet], disponible en http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/Paginas/MateParaTodos/e07/Aplicaciones_reales_Laplace.ppt,[acceso el 31 de Mayo de 2015].
[3] Google Books, [internet], disponible en https://books.google.com.ar/books?id=-P76slq9Kf8C&pg=PA345&lpg=PA345&dq=vibraciones+en+viga+usando+ecuaciones+diferenciales&source=bl&ots=mKWZCig7r4&sig=sxFeOCD2LMy7j23KIJGzzgTc0a0&hl=es&sa=X&ved=0CBwQ6AEwAGoVChMI6ZPxyvahxwIVC4OQCh3uLA8g#v=onepage&q=vibraciones%20en%20viga%20usando%20ecuaciones%20diferenciales&f=false[acceso el 6 de Agosto de 2015].
[4] G. Calandrini, “Guía de Teoría-Funciones de Variable Compleja”. 1er. Cuatrimestre 2015, páginas 51, 52.