Análisis y caracterización de los sistemas LTI usando la Transformada Z

Manuel Ignacio Prieto

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Manu11_111@hotmail.com
Agosto 2013

Resumen: En este informe se mostrara una de las aplicaciones, en ingeniería de la Transformada Z en la resolución de ecuaciones de diferencias en un sistema lineal e invariante en el tiempo. La Transformada z es a los sistemas discretos lo que la transformada de Laplace es a los sistemas continuos.

Palabras clave: sistema LTI, ecuaciones de diferencias, Transformada Z.

I. INTRODUCCIÓN

La Transformada de Z es importante en el análisis y representación de los sistemas LTI de tiempo discreto. La Transformada Z puede interpretarse como la transformada de Fourier multiplicada por una secuencia exponencial, que se emplea entre otras aplicaciones en el estudio del procesamiento de señales digitales, como el análisis y proyecto de circuitos digitales, los sistemas de radar o telecomunicaciones y especialmente los sistemas de control de procesos de computadora. Un sistema de control está definido como un conjunto de componentes que pueden regular su propia conducta o la de otro sistema con el fin de lograr un funcionamiento predeterminado, de modo que se reduzcan las probabilidades de fallos y se obtenga los resultados buscados.

II. DESARROLLO

Un sistema LTI o sistema lineal e invariante en el tiempo, es aquel que, como su propio nombre indica, cumple las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo.

Consideremos el sistema LTI en el cual la entrada x[n] y la salida y[n] satisfacen la ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] \tag{1}$$

Aplicando la transformada z en ambos lados de la ecuación (1), y usando la propiedad de linealidad y la propiedad de desplazamiento en el tiempo, obtenemos

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y[z] = X[z] + \frac{1}{3}z^{-1}X[z] \tag{2}$$

O

$$Y(z) = X[z]\left[\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right] \tag{3}$$

Y aplicando la propiedad de convolución en la ecuación (3) tenemos,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{4}$$

Esta proporciona la expresión algebraica de H(z) pero no la región de convergencia. De hecho hay dos respuestas al impulso distintas que son consistentes con la ecuación de diferencias inicial, una derecha y otra izquierda. De modo que, hay dos posibles selecciones diferentes de la región de convergencia asociada con la expresión algebraica final. Una, $|z| > \frac{1}{2}$ está asociada con la suposición de que h[n] es una señal derecha y la otra $|z| < \frac{1}{2}$ está asociada con la suposición de que h[n] es una señal izquierda.

Para el caso más general de una ecuación de diferencias de orden N, se procede de igual forma que en el ejemplo anterior, aplicamos la transformada z en ambos lados de la ecuación y usamos las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo. Por consiguiente, consideramos un sistema LTI para el cual la entrada y salida satisfacen una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

Luego,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y[z] = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} X[z] \tag{5}$$

O

$$Y[z] \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X[z] \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \tag{6}$$

De modo que

$$H[z] = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{7}$$

Observemos en particular que la función de transferencia de un sistema que satisface una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes siempre es racional. Mirando el ejemplo anterior la ecuación por sí misma no nos brinda información acerca de la región de convergencia asociada con la expresión algebraica H(z). Sin embargo, una restricción adicional como la causalidad o la estabilidad del sistema, sirve para especificar la región de convergencia.

La transformada z de tiempo discreto permite reemplazar las operaciones en el dominio del tiempo tales como la convolución y el desplazamiento en el tiempo, con operaciones algebraica. El empleo de la transformada z para convertir descripciones de sistemas a ecuaciones de diferencias algebraicas también es útil en el análisis de las conexiones de sistemas LTI, como conexiones en serie, paralelo y retroalimentadas.

Por ejemplo consideremos una conexión retroalimentada de dos sistemas como se muestra en la figura 1. Es difícil determinar en el dominio del tiempo la ecuación en diferencias o la respuesta al impulso del sistema total. Sin embargo con los sistemas y las secuencias expresadas en términos de su transformada z, el análisis involucra solo ecuaciones algebraicas. Las ecuaciones específicas de las conexiones de la figura 1 son exactamente iguales a las ecuaciones (4) y (7), con el resultado final de que la función de transferencia total de este sistema retroalimentado es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)} \tag{8}$$

Un sistema LTI representado por una ecuación lineal en diferencias finitas se transforma por medio de la transformada z en

$$Y(z) = X(z)H(z) \tag{9}$$

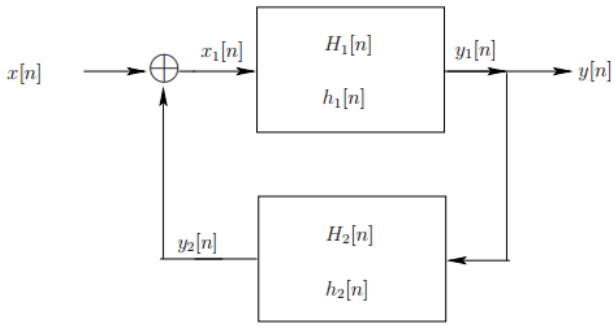

Figura 1: Conexión retroalimentada de dos sistemas

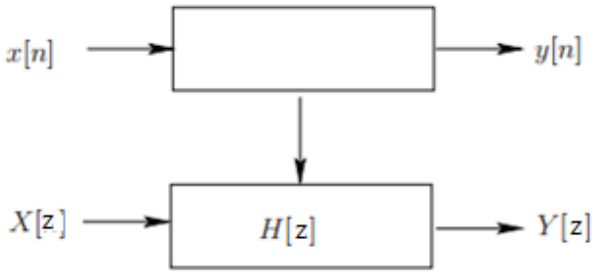

Figura 2: Sistema de transferencia H(z)

Que es la ley de Ohm generalizada. A la relación entre salida y la entrada del sistema se le llama transferencia H(z).

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{10}$$

La solución general del sistema es la convolución:

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{11}$$

III. Conclusión

La importancia del modelo de la Transformada Z radica en que permite reducir Ecuaciones de Diferencias o ecuaciones recursivas con coeficientes constantes a Ecuaciones Algebraicas lineales.

La Transformada z nos permite determinar en el dominio del tiempo la ecuación en diferencias o la respuesta al impulso de un sistema LTI solo con ecuaciones algebraicas.

Referencias

[1] Glyn James, *Matemáticas avanzadas para ingeniería,* Pearson Educación, 2002.
[2] Sistema LTI. http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_LTI
[3] Camacho Garcia Andres. Universidad politécnica de Valencia. http://riunet.upv.es/handle/10251/4842
[4] Guillermo Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja" 1er. Cuatrimestre 2013.