Uso de las transformadas de Laplace y Z en el área de probabilidad

Manuel Napoli

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
napolimanuel@gmail.com
Febrero 2014

Resumen: En la siguiente nota se describe los aspectos básicos de la utilización de las transformadas de Laplace y Z para calcular diferentes variables que son utilizadas para diseñar sistemas probabilísticos. Se da una breve introducción al tema, junto con las debidas justificaciones y ejemplos que facilitan la comprensión.

Palabras clave: probabilidad, Laplace, transformada Z.

I. Introducción

En muchas áreas de ingeniería se utilizan procesos estocásticos o aleatorios para construir modelos de sistemas tales como conmutadores telefónicos, concentradores de redes de comunicación de datos, sistemas de tráfico, líneas de atención a clientes en un banco o un supermercado, etc.

La construcción de los modelos permite analizar los sistemas para evaluar su desempeño y proponer mejoras a los mismos, o bien, evaluar el impacto de algunos cambios en su operación antes de implantarlos. También permiten determinar conjunto de parámetros más adecuados para un cierto caso en particular, a fin de que el sistema satisfaga ciertas especificaciones de diseño.

En los concentradores de las redes de comunicación de datos se usan variables aleatorias para modelar los tiempos entre llegadas de mensajes o paquetes de datos al concentrador. También se usan variables aleatorias para modelar los tiempos de transmisión de los mensajes o paquetes que necesitan ser transmitidos por alguna de las líneas de salida del concentrador.

Pudiera ocurrir que la memoria del concentrador este llena en algún momento y se tenga que rechazar un mensaje que llega porque no hay espacio en la memoria. Los modelos en este caso permitirían determinar la velocidad necesaria en las líneas de salida del concentrador para que el tiempo promedio de atraso de un mensaje, medido desde que se recibe hasta que ha sido retransmitido, sea menor a un cierto valor. También permitirán determinar el tamaño de memoria necesario para que la probabilidad de que un mensaje que llegue sea rechazado sea menor que un cierto valor.

II. Uso de la transformada de Laplace en probabilidad

En el caso de variables aleatorias continuas no negativas, se puede utilizar la transformada de Laplace para determinar momentos de las variables en lugar de realizar las integrales respectivas. A continuación se presentan los conceptos relativos a la aplicación de esta transformada a funciones de densidad de probabilidad para variables aleatorias continuas no negativas.

Sea t una variable aleatoria continua no negativa y sea f (t) su función de densidad de probabilidad. La transformada de Laplace de esta función de densidad de probabilidad es:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Sea t una variable aleatoria continua no negativa y sea f (t) su función de densidad de probabilidad. La transformada de Laplace de esta función de densidad de probabilidad es:

- $F(s)\Big|_{s=0} = 1$
- $\frac{dF(s)}{ds}\Big|_{s=0} = -E[t]$
- $\frac{d^2F_x(s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = E[t^2]$
- $\frac{d^nF(s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = (-1)^n E[t^n]$

Estas propiedades se derivan a continuación:

- $F(s)\Big|_{s=0} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\Big|_{s=0} = \int_0^\infty f(t)dt = 1$
- $\frac{dF(s)}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\Big|_{s=0} = \int_0^\infty -tf(t)e^{-st}dt\Big|_{s=0} = -E[t]$
- $\frac{d^2F(s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\Big|_{s=0} = \int_0^\infty t^2f(t)e^{-st}dt\Big|_{s=0} = \int_0^\infty t^2f(t)dt = E[t^2]$

La generalización de la propiedad anterior es:

- $\frac{d^nF(s)}{ds^n}\Big|_{s=0} = (-1)^n E[t^n]$

Ejemplo 1

Suponga que el tiempo entre llegadas de mensajes a un concentrador de una red de comunicación de datos puede ser modelado como una variable aleatoria con distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$ segundos.

Su función de densidad de probabilidad es:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

La media de esta distribución es:

$$E[t] = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} segundos\ (seg)$$

La variancia de esta distribución es:

$$\sigma_t^2 = E[(t - E[t])^2] = E[t^2] - E[t]^2$$

Es necesario calcular el valor esperado de t cuadrada:

$$E[t^2] = \int_0^\infty t^2f(t)dt = \int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt = -t^2e^{-\lambda t} - \frac{2}{\lambda}te^{-\lambda t} - \frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \frac{2}{\lambda^2}$$

Entonces:

$$\sigma_t^2 = E[t^2] - E[t]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} seg^2$$

Usando la transformada de Laplace, se tiene:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\lambda}{s + \lambda}$$

Obsérvese que $F(s)\Big|_{s=0} = \frac{\lambda}{s+\lambda}\Big|_{s=0} = 1$

La media de la distribución es:

$$E[t] = -\frac{dF(s)}{ds}\Big|_{s\,=\,0} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda}{s+\,\lambda}\right)\Big|_{s\,=\,0} = \frac{\lambda}{(s+\,\lambda)^2}\Big|_{s\,=\,0} = \frac{1}{\lambda}seg.$$

El valor esperado de t cuadrada es:

$$E[t^2] = -\frac{d^2F(s)}{ds^2}\Big|_{s\,=\,0} = -\frac{d^2}{ds}\left(\frac{\lambda}{s+\,\lambda}\right)\Big|_{s\,=\,0} = \frac{2\lambda}{(s+\,\lambda)^3}\Big|_{s\,=\,0} = \frac{2}{\lambda^2}seg^2.$$

Entonces, la variancia es:

$$\sigma_t^2 = E[t^2] - E[t]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}seg^2$$

Para calcularla media y la variancia con el método tradicional se utilizó integración por partes. Para determinar la transformada de Laplace de la función de densidad de probabilidad se utilizaron las tablas de transformadas de Laplace. Obsérvese que es más rápido usar la transformada para los cálculos anteriores.

III. USO DE LA TRANSFORMADA Z EN PROBABILIDAD

En el caso de variables aleatorias enteras no negativas, se puede utilizar la transformada z para determinar momentos de las variables en lugar de realizar las integrales respectivas, de manera similar a como se utiliza la transformada de Laplace para variables aleatorias continuas.

Supóngase que se tiene una variable aleatoria, x, que solamente puede tomar valores enteros no negativos. Si la probabilidad en que la variable aleatoria x tome el valor k está definida por $P = [x = k]$, para k =0, 1, 2, 3,…

La transformada z de la función de probabilidad para x está definida como sigue:

$$G_x\,(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P[x = k]z^k$$

Esta transformada tiene las siguientes propiedades:

- $G_x(z)\Big|_{z=1} = 1$
- $\frac{dG_x(z)}{dz}\Big|_{z=1} = E[x]$
- $\frac{d^2G_x(z)}{dz^2}\Big|_{z=1} = E[x^2] - E[x]$

Las propiedades anteriores se derivan a continuación:

- $G_x(z)\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} P[x = k]z^k\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} P[x = k] = 1$
- $\frac{dG_x(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}[\sum_{k=0}^{\infty} P[x = k]z^k]\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} kP[x = k]z^{k-1}\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} kP[x = k] = E[x]$
- $\frac{d^2G_x(z)}{dz^2}\Big|_{z=1} = \frac{d^2}{dz^2}[\sum_{k=0}^{\infty} P[x = k]z^k]\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P[x = k]z^{k-2}\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2P[x = k] - \sum_{k=0}^{\infty} kP[x = k] = E[x^2] - E[x]$

Ejemplo 2

En algunos casos se utiliza una distribución geométrica para modelar la longitud de los mensajes que llegan a un concentrador de una red de comunicación de datos. Si n representa el número de bytes que tiene un mensaje, la probabilidad de que un mensaje tenga k bytes está dado por:

$$P[n = k] = (1-p)p^{k-1} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad 0 < p < 1$$

¿Cuál es la longitud promedio de los mensajes que llegan al concentrador?
La longitud promedio de mensajes que llegan está dada por:

$$E[n] = \sum_{k=0}^{\infty} kP[n = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)p^{k-1} = \frac{1-p}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p} bytes$$

Usando la transformada z, se tiene:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P[n = k]z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)p^{k-1}z^k = \frac{(1-p)z}{1-pz}$$

Obsérvese que $G_n(z) \Big|_{z=1} = \frac{(1-p)z}{1-pz} \Big|_{z=1} = 1$

El número promedio de mensajes en el concentrador puede calcularse como sigue:

$$E[n] = \frac{dG_n(z)}{dz} \Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(1-p)z}{1-pz}\right] \Big|_{z=1} = \frac{(1-pz)(1-p) - (1-p)z(-p)}{(1-pz)^2} \Big|_{z=1}$$
$$= \frac{(1-p)}{(1-pz)^2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-p} bytes$$

En este ejemplo, el cálculo de la longitud promedio de los mensajes es sencillo con ambos métodos, pero en otras situaciones es más rápido usando transformada z.

IV. Conclusión

Se puede apreciar que mediante el uso de las transformadas, se reduce la complejidad al calcular las variables probabilísticas. Se pasa de tener que resolver una integral, la cual dependiendo de la función puede ser muy compleja de calcular, a aplicar la transformada. Esto no solo es útil cuando lo utilizamos para un problema determinado, sino que diferentes software podrían sacar ventajas reduciendo el tiempo de ejecución, es decir, obteniendo una solución más rápida pero igual de confiable.

Referencias

[1] Dr. Jorge A. Olvera R., “Uso de las transformadas de Laplace y z en el área de probabilidad”, disponible en http://www.mty.itesm.mx/decic/deptos/m/Paginas/MateParaTodos/apoyo/PlaticaTransformadasJorgeOlvera.pdf

[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Concentrador, [acceso el 24 de febrero de 2014].